UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Scienze MM. FF. NN.

Dipartimento di Fisica “G. Galilei”

TESI DI LAUREA IN FISICA

UN TRASDUTTORE OTTICO PER IL RIVELATORE A.U.R.I.G.A.: SENSIBILITÀ PREVISTA E MISURE PRELIMINARI PER UN PROTOTIPO

Relatore : **Prof. M. Cerdonio**

Correlatore : **Dott. C. Rizzo**

Laureanda: **Livia Conti**

ANNO ACCADEMICO 1995-96

Indice

pag

Introduzione..... i

Capitolo 1

LE ONDE GRAVITAZIONALI ED I SISTEMI DI RIVELAZIONE..... 1

§ 1.1 Le onde gravitazionali..... 3

§ 1.2 Sorgenti di onde gravitazionali..... 6

§ 1.3 Sistemi di rivelazione..... 10

§ 1.4 Il rivelatore A.U.R.I.G.A..... 17

§ 1.5 Bibliografia..... 20

Capitolo 2

I TRASDUTTORI RISONANTI..... 23

§ 2.1 Calcolo di sensibilità di una barra risonante..... 25

§ 2.2 I trasduttori: introduzione..... 28

§ 2.3 Rivelatore risonante multimodo..... 31

§ 2.4 Il trasduttore risonante capacitivo e l' amplificatore a SQUID... 33

§ 2.5 Strategie per il futuro e motivazioni di questa tesi..... 36

§ 2.6 Bibliografia..... 37

Capitolo 3

IL TRASDUTTORE OTTICO..... 39

§ 3.1 Introduzione al trasduttore ottico..... 41

§ 3.2 Il risonatore Fabry-Perot..... 42

§ 3.3 Aggancio in frequenza di un laser ad una cavità Fabry-Perot..... 49

§ 3.4 Principio di funzionamento del trasduttore ottico..... 53

§ 3.5 Calcolo di sensibilità di una barra equipaggiata con un trasduttore ottico..... 58

§ 3.6 Bibliografia..... 69

Capitolo 4

PROGETTO MECCANICO DEL TRASDUTTORE OTTICO... 71

§ 4.1 Modello elastico del trasduttore..... 73
§ 4.2 Progetto della parte risonante del trasduttore ottico..... 76
§ 4.3 Progetto della parte non risonante del trasduttore ottico..... 80
§ 4.4 Bibliografia..... 88

Capitolo 5

MISURE SUL SISTEMA BARRA + TRASDUTTORE 89
§ 5.1 Il sistema di sospensione della barra a temperatura ambiente..... 91
§ 5.2 Misure sulla barra a temperatura ambiente..... 98
§ 5.3 Misure sul sistema barra-trasduttore..... 102
§ 5.4 Bibliografia..... 107

Capitolo 6

MISURE DI OTTICA SU BANCO..... 109
§ 6.1 Il banco ottico..... 111
§ 6.2 Il rumore in potenza del laser..... 114
§ 6.3 Realizzazione di una cavità Fabry-Perot sul trasduttore..... 116
§ 6.4 Bibliografia..... 120

Conclusioni..... 121

Appendice..... 123

Ringraziamenti..... 127

Introduzione

La ricerca sperimentale delle onde gravitazionali è iniziata negli anni ‘60 grazie a J. Weber della Università del Maryland. Da allora molti progressi sono stati compiuti e la sensibilità dei rivelatori è migliorata di diversi ordini di grandezza. Ciò nonostante le onde gravitazionali non sono state ancora rivelate direttamente e continua il lavoro per migliorare i rivelatori esistenti e costruirne di nuovi e più sensibili.

Presso i Laboratori Nazionali di Legnaro (Padova) dell’ Istituto Nazionale di Fisica Nucleare è installato il rivelatore per onde gravitazionali A.U.R.I.G.A., che ad oggi rappresenta l’ ultima evoluzione dei rivelatori a barra risonante.

Tra le questioni più delicate in un rivelatore di tal tipo vi sono quelle della trasduzione del segnale meccanico di vibrazione della barra in segnale elettromagnetico e dell’ allargamento della banda di frequenza utile ai fini della rivelazione. Attualmente una delle soluzioni per questi problemi viene dall’ uso del trasduttore risonante capacitivo, che si utilizza anche nel rivelatore A.U.R.I.G.A.. Il lavoro presentato in questa tesi propone una nuova soluzione ai problemi indicati: il trasduttore risonante ottico. Di esso si studia la sensibilità e ne viene realizzato un prototipo, sul quale si eseguono alcune misure.

Più in dettaglio questa tesi si articola come segue:

- nel primo capitolo si presenta la descrizione teorica delle onde gravitazionali nell’ ambito della Relatività Generale. Vengono poi discusse brevemente le sorgenti di onde gravitazionali e si descrive il funzionamento di un rivelatore a barra risonante, facendo in particolare riferimento ad A.U.R.I.G.A.;
- nel secondo capitolo si calcola la sensibilità di una barra risonante per la rivelazione di onde gravitazionali. Si presenta il problema della trasduzione del segnale meccanico e della larghezza di banda, mettendo in rilievo i vantaggi offerti dall’ uso di trasduttori risonanti. Viene brevemente discusso il funzionamento del trasduttore risonante capacitivo ed infine vengono espresse le motivazioni per questo lavoro di tesi;
- nel terzo capitolo si introduce il concetto di risonatore ottico Fabry-Perot e si descrive la tecnica di aggancio in frequenza di un laser ad un risonatore ottico di questo tipo. Si illustra poi il principio di funzionamento del trasduttore risonante ottico e si calcola la sensibilità di un rivelatore a barra risonante equipaggiato con un trasduttore simile;

- nel quarto capitolo si descrive la progettazione e realizzazione di un prototipo di trasduttore risonante ottico, in tutte le sue parti meccaniche, mettendo in particolare rilievo l' importanza di un buon fattore di merito meccanico. Si presenta anche un modello elastico della parte risonante del prototipo;
- nel quinto capitolo si presentano le misure sperimentali sul sistema di sospensione ed isolamento del rumore di vibrazione meccanica verticale del suolo, effettuate sulla barra a temperatura ambiente a disposizione nell' ambito dell' esperimento AURIGA. Di tale barra si misura la frequenza di risonanza ed il fattore di merito meccanico. Si eseguono poi le misure di frequenze di risonanza e fattori di merito meccanico del sistema costituito dalla barra a cui si ancora il prototipo di trasduttore ottico realizzato;
- nel sesto capitolo si descrive brevemente il laboratorio di ottica che è stato necessario attrezzare per la realizzazione del trasduttore ottico. Si descrive poi la misura del rumore della sorgente laser e la realizzazione di una cavità Fabry-Perot sul trasduttore, con la relativa misura di finezza.

Capitolo 1

Le onde gravitazionali ed i sistemi di rivelazione

§ 1.1 - Le onde gravitazionali

Nell' ambito della teoria della relatività generale, le equazioni, dette di Einstein, per il campo gravitazionale in presenza di una distribuzione di energia e momento descritta dal tensore $T_{\mu\nu}$ si scrivono come:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

ove $R_{\mu\nu}$ e R sono rispettivamente il tensore e lo scalare di Ricci [1], $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, G la costante di Newton e c la velocità della luce. Una volta noto il tensore energia-impulso, la (1.1) rappresenta un sistema di 10 (e non 16, per ragioni di simmetria) equazioni differenziali accoppiate per il tensore metrico. La difficoltà nel risolvere tali equazioni è legata al fatto che esse non sono lineari, la non linearità essendo dovuta ad effetti di interazione del campo gravitazionale con se stesso.

Il caso di nostro interesse è quello delle soluzioni radiative nella approsimazione di campo debole. L' idea fu presentata per la prima volta da A. Einstein già nel 1916 ma fu solo nel 1968 che venne elaborata in modo completo [2], [3]; per una moderna trattazione si veda ad esempio la riferimento [4]. Per campi gravitazionali deboli, la metrica $g_{\mu\nu}$ può essere considerata quasi piatta e si può dunque scrivere:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

ove:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rappresenta il tensore metrico di Minkowski e $|h_{\mu\nu}|<<1$; in tal caso, definendo

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$$

con $h = h^{\mu}{}_{\mu}$, e scelta la gauge di Lorentz:

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{1.3}$$

si possono scrivere, a partire dalle (1.1), le equazioni di campo linearizzate, ottenute, cioè, considerando solo termini lineari in $h_{\mu\nu}$:

$$\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

Le (1.3) e (1.4) richiamano per analogia le equazioni soddisfatte dal potenziale elettromagnetico nella gauge di Lorentz nello spazio-tempo piatto; non sorprende a questo punto che anche esse presentino soluzioni radiative.

Nel vuoto la (1.4) diventa:

$$\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.5}$$

Si può quindi cercare una soluzione della (1.5) del tipo:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} \tag{1.6}$$

Essa è valida se:

$$k^{\nu}A_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{e} \qquad k_{\mu}k^{\mu} = 0 \tag{1.7}$$

tali due condizioni venendo rispettivamente dalla (1.3) e dalla (1.5). Questa soluzione rappresenta un' onda piana di pulsazione $\omega^2 = c^2k_0{}^2 = c^2\left(k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2\right)$ che si propaga alla velocità della luce lungo la direzione:

$$\hat{k} = \frac{1}{k_0}(k_1, k_2, k_3)$$

La soluzione come scritta nella (1.6) sembra avere 6 componenti indipendenti; in realtà la gauge non è ancora del tutto fissata in quanto la (1.3) è preservata anche dopo che si effettui una trasformazione:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - a_{\mu,\nu} - a_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}a^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{1.8}$$

ove a_μ è un vettore arbitrario sottostante alla condizione $\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}a_{\mu} = 0$ e piccolo tanto che resti $\left|\bar{h}'_{\mu\nu}\right| << 1$. Prendendo a_μ del tipo:

$$a_{\mu} = B_{\mu}e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}}$$

con B_μ costante, la (1.8) implica che:

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - iB_{\mu}k_{\nu} - iB_{\nu}k_{\mu} + i\eta_{\mu\nu}B^{\alpha}k_{\alpha}$$

Si può scegliere B_μ in modo tale da imporre due ulteriori condizioni ad $A'_{\mu\nu}$:

$$A'_{\mu\nu}U^{\nu} = 0 \qquad A'_{\mu}{}^{\mu} = 0 \tag{1.9}$$

ove U^α è un vettore di tipo tempo (cioè tale che $U^\alpha U_\alpha<0$) fissabile a piacere (nel seguito eviteremo di scrivere l' apice ' sottointendendolo). Tali due condizioni sono dette condizioni di gauge trasversa e a traccia nulla (nel seguito indicate con TT) e fissano definitivamente la gauge: a questo punto le componenti indipendenti di $A_{\mu\nu}$ sono due ed entrambe fisicamente significative. Le condizioni (1.9) implicano che sia:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$$

Consideriamo ora il particolare sistema di riferimento di Lorenz cui si arriva con la scelta $U^\alpha = \delta^\alpha_0$, ove δ^α_β rappresenta il tensore di Kronecker; in questo sistema di riferimento si ha:

$$\bar{h}^{(TT)}{}_{\mu 0} = 0 = \sum_{j=1}^{3} \bar{h}^{(TT)}{}_{jj}$$

Orientiamo gli assi del sistema di riferimento in modo tale che l' onda gravitazionale viaggi lungo l' asse z e cioè sia $k_\mu = (\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c})$; si ricava allora da (1.9) e (1.7) che $A_{\alpha 3}=0$. D' altra parte la condizione (1.9) sulla traccia implica che $A_{11}=-A_{22}$ e quindi, in questo sistema di riferimento, si ha:

$$A^{(TT)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le due componenti indipendenti corrispondono a due indipendenti polarizzazioni dell' onda gravitazionale, che si è soliti indicare come polarizzazione $\times$ e polarizzazione +:

$$h_+ = h^{(TT)}_{11} = -h^{(TT)}_{11} = A_{11} e^{ik_\alpha x^\alpha} \qquad h_\times = h^{(TT)}_{12} = h^{(TT)}_{21} = A_{12} e^{ik_\alpha x^\alpha}$$

Come nel caso elettromagnetico, si può scomporre una generica onda gravitazionale in due componenti polarizzate linearmente; in Fig.1.1 viene mostrato l' effetto dell' arrivo su un anello di particelle di prova giacente sul piano (x,y) di un' onda gravitazionale di polarizzazione + o $\times$ viaggiante lungo l' asse z.

La trattazione sinora data è svolta nell' ambito della teoria della relatività generale; questa tuttavia non è la sola teoria moderna della gravitazione. La previsione delle onde gravitazionali è ovviamente diversa a seconda della teoria che si considera. Una interessante e aggiornata esposizione parallela e comparata delle diverse teorie si trova in [5].

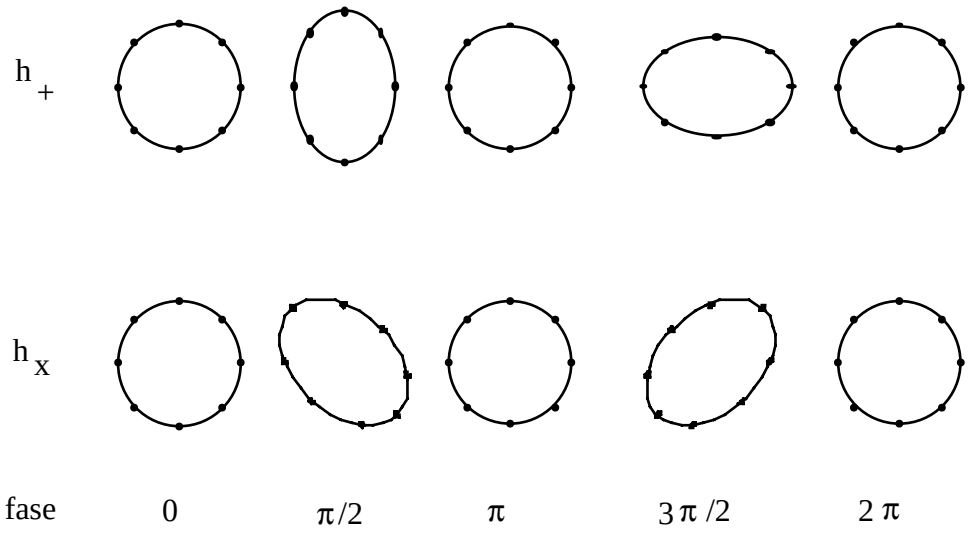

Fig.1.1 Deformazione di un anello di particelle di prova per effetto di un' onda gravitazionale, in corrispondenza di diverse fasi dell' onda

§ 1.2- Sorgenti di onde gravitazionali

In analogia con ciò che si fa per il campo elettromagnetico, è possibile calcolare la perdita di energia E nell' unità di tempo di un sistema avente densità di massa ρ dovuta a irraggiamento di radiazione gravitazionale. Dopo avere mediato su tutte le direzioni essa risulta [6]:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\left(\frac{\partial^3 D_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2 \qquad (1.10)$$

ove $D_{\alpha\beta}$ rappresenta il tensore di momento di quadrupolo delle masse:

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho\left[3x_\alpha x_\beta - x^2\delta_{\alpha\beta}\right]d^3x$$

A differenza del caso elettromagnetico, dunque, nel caso della radiazione gravitazionale si ha emissione solo al termine almeno quadrupolare: il collasso sfericamente simmetrico di una stella, ad esempio, non può avvenire con irraggiamento di onde gravitazionali.

Da notare, inoltre, nella (1.10) il coefficiente moltiplicativo G/c^5 il quale indica come la perdita di energia di un sistema per effetto di irragiamento gravitazionale sia in generale un effetto difficilmente osservabile. Per un' idea quantitativa del problema

si può calcolare quale sia la potenza, mediata su un periodo di rotazione, irraggiata sotto forma di onde gravitazionali da un sistema di due corpi di massa m_1 e m_2 che descrivono, attorno al centro di massa, un' orbita circolare di raggio r:

$$-\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{32 G \mu^2 \omega^6 r^4}{5c^5} \tag{1.11}$$

ove $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ è la massa ridotta e ω la pulsazione del movimento di rotazione. Ad esempio, per il sistema Terra-Sole si ha una perdita media di energia al secondo di:

$$-\overline{\frac{dE}{dt}} \approx 2 \cdot 10^2 \, W$$

Poichè d' altra parte l' energia potenziale gravitazionale del sistema è di $\approx -10^{35} J$, si capisce che per osservare una sensibile diminuzione di energia si dovrebbe aspettare un tempo tanto lungo da superare addirittura la vita dell' universo.

Anche se è possibile in linea di principio produrre onde gravitazionali in laboratorio, la ricerca oggi si concentra in prevalenza sul tentativo di rivelare onde gravitazionali di origine astronomica. Si è soliti distinguere tre fondamentali tipi di onde gravitazionali di origine astronomica, a seconda del loro comportamento nel tempo: *onde impulsive*, *onde periodiche* ed *onde stocastiche* [7], [8], [9]. Nel seguito si descriveranno le sorgenti astronomiche di onde gravitazionali impulsive e periodiche, in quanto alla rivelazione di questo tipo di segnali sono volti gli odierni rivelatori.

Onde impulsive

Le onde impulsive sono onde gravitazionali prodotte da fenomeni violenti nell' universo che durano tipicamente da 10^{-3} a 10^{-1} sec; sorgenti di onde impulsive sono, ad esempio, le esplosioni di supernova, i collassi di stelle o di ammassi di stelle che formino buchi neri, la coalescenza di sistemi binari di buchi neri o di stelle di neutroni.

Una supernova [10] è una stella che, giunta alla fase terminale della sua evoluzione, esplode emettendo una enorme quantità di energia ($\geq 10^{44} J$) con una luminosità che raggiunge $\approx 10^{37} J/sec$. Esplosioni di supernova sono più frequentemente osservate nelle galassie a spirale. Nonostante uno sforzo teorico che dura già da oltre 30 anni e la osservazione nel 1987 della esplosione di supernova denominata 1987A, il meccanismo del fenomeno non è ancora noto in dettaglio.

Sono stati proposti due fondamentali processi per spiegare la grande quantità di energia rilasciata nella esplosione di supernova: da una parte l' esplosione

termonucleare che dovrebbe caratterizzare principalmente stelle con massa inferiore a 8 masse solari, dall' altra l’ implosione del nucleo della stella, che dovrebbe caratterizzare principalmente stelle con massa superiore a 8 masse solari.

Più in dettaglio il primo meccanismo dovrebbe innescarsi quando nel nucleo della stella la combustione nucleare è termicamente e dinamicamente instabile. La stella allora viene consumata per detonazione o deflagrazione, a seconda delle caratteristiche della materia componente il nucleo. Questo processo tipicamente avviene in sistemi binari in seguito all' accrescimento in massa di una nana bianca a spese della compagna.

Il secondo meccanismo, invece, prevede che nella fase di gigante rossa la stella bruci Elio formando un nucleo di Carbonio, Ossigeno e in seguito questo a sua volta bruci formando un nucleo di Ferro o Magnesio; quest' ultimo poi, se sufficientemente massiccio, collassa in tempi di circa un millisecondo. Tale meccanismo porta alla conseguente formazione di una stella di neutroni o di un buco nero.

In conseguenza di tali due processi si suole dividere le supernove in due tipi: supernove di tipo I per il primo processo, supernove di tipo II per il secondo. Dal punto di vista dello spettro di emissione le supernove di tipo I non mostrano evidenza di Idrogeno, al contrario di quelle di tipo II. Queste ultime sono ritenute essere la più promettente sorgente di onde gravitazionali con frequenza intorno al KHz: secondo le attuali predizioni teoriche, una supernova del secondo tipo dovrebbe emettere sotto forma di radiazione elettromagnetica circa il 10% dell' energia totale rilasciata, e sotto forma di radiazione gravitazionale il restante 90%. Al contrario le supernove di tipo I rilasciano l' energia soprattutto sotto forma di neutrini, come hanno dimostrato le misure fatte in occasione della supernova 1987A: in tal caso si è stimato un rilascio di energia sotto forma di neutrini pari a $(2.5 \pm 1) \cdot 10^{46}\,\mathrm{J}$.

La difficoltà nello stimare l' energia emessa sotto forma di radiazione gravitazionale nasce dal fatto che i modelli usati sono a simmetria sferica o assiale, il che, come visto, porta a emissione di onde gravitazionali di intensità nulla o molto piccola. È stato comunque stimato [11] che la frazione θ della massa a riposo della stella collassante emessa sotto forma di radiazione gravitazionale dovrebbe assumere valori tra 10^{-6} e 10^{-2}. Ciò corrisponde ad una ampiezza dell' impulso gravitazionale (cioè l' ampiezza della perturbazione del tensore metrico come in (1.2)) a distanza r:

$$h \approx 3 \cdot 10^{-19} \sqrt{\theta} \left(\frac{1\mathrm{KHz}}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{1\mathrm{Mpc}}{r} \right)$$

ove ν è la frequenza caratteristica dell' impulso.

Il tasso di eventi che ci si può aspettare è di circa 3 esplosioni di supernova ogni secolo nella galassia; se si spinge l' osservazione fino alle galassie dell' ammasso della

Vergine distante circa 15Mpc, allora il tasso dovrebbe crescere a qualche evento al mese.

L' impulso standard

Come si è appena visto, esistono diverse possibilità perchè venga generato nell' universo un impulso gravitazionale. Per quanto riguarda la forma temporale di quest' ultimo, essa dipende dai dettagli del meccanismo che lo genera; nei calcoli di sensibilità del rivelatore AURIGA e nel seguito di questa tesi si assume che l' impulso sia del tipo:

$$h(t) = h_0 e^{-\frac{t^2}{2\Delta t^2}} \cos(2\pi\nu_s t) \qquad (1.12)$$

In questa formula h(t) rappresenta l' ampiezza della perturbazione al tensore metrico secondo la (1.2) espressa in funzione del tempo t; ν_s è la frequenza centrale dell' impulso e Δt la sua durata. Si sceglie inoltre ν_s=1KHz e si fissa la durata secondo la relazione:

$$4\nu_s \Delta t = 1 \qquad (1.13)$$

La (1.12), che descrive un impulso di onde gravitazionali detto nel seguito *impulso standard*, è ragionevole nel caso in cui l' impulso sia dovuto ad una esplosione di supernova.

In Fig.1.2 riportiamo l' andamento nel tempo di h come in (1.12), per h_0=1.

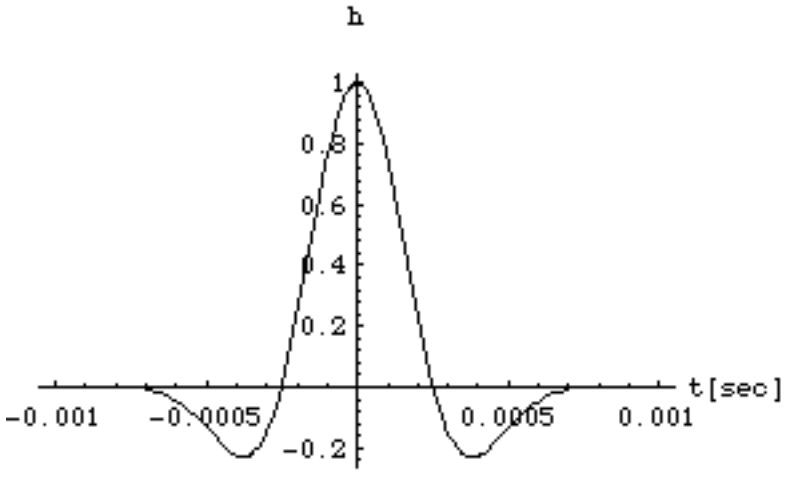

Fig. 1.2 L' impulso standard di ampiezza unitaria

Onde periodiche

Sorgenti di onde gravitazionali periodiche sono, ad esempio, sistemi stellari in rapida rotazione quali le stelle di neutroni e i sistemi binari di stelle.

Come abbiamo visto, le supernove danno spesso origine a stelle di neutroni in rapida rotazione, osservate come pulsar. Se il periodo di rotazione è dell' ordine del msec o più, può insorgere una instabilità che origina onde superficiali propagantesi in verso opposto rispetto alla rotazione della stella. Ciò causa una rottura della simmetria assiale con conseguente emissione di onde gravitazionali a frequenza doppia rispetto alla rotazione. Se e è l' ellitticità allora l' ampiezza del segnale gravitazionale a distanza r dovrebbe essere [9]:

$$h \approx 10^{-23} e \left(\frac{\nu}{10\,\mathrm{Hz}}\right)^2 \left(\frac{10\,\mathrm{Kpc}}{r}\right)$$

Si è stimato [9] che per una pulsar la massima ellitticità dovrebbe assumere un valore tra 10^{-4} e 10^{-6}. Per effetto di questo irraggiamento il momento angolare della pulsar diminuisce in tempi caratteristici di $10^2 \div 10^3$ anni: ne consegue che tra le pulsar le migliori candidate come sorgenti di onde gravitazionali periodiche sono le pulsar giovani.

Per quanto riguarda, invece, i sistemi binari, essi emettono onde gravitazionali, non presentando simmetria assiale. Poichè tali sistemi non raggiungono velocità relativistiche se non quando le stelle sono distanti qualche raggio stellare, si possono calcolare in approssimazione newtoniana la frequenza caratteristica e l' ampiezza del segnale [12]:

$$\nu = 165 \left(\frac{M}{M_{Sole}}\right)^{1/2} \left(\frac{100\mathrm{Km}}{R}\right)^{3/2} \mathrm{Hz}$$

$$h \approx 2 \cdot 10^{-21} \left(\frac{M}{M_{Sole}}\right)^2 \left(\frac{100\mathrm{Km}}{R}\right)\left(\frac{1\mathrm{Mpc}}{r}\right)$$

ove M_{sole} è la massa del sole, M la massa di ciascuna delle due stelle , R è la loro mutua distanza e r la distanza del rivelatore dalla sorgente.

§ 1.3 - Sistemi di rivelazione

Rivelare le onde gravitazionali, oltre a coronare uno sforzo sperimentale pluridecennale, costituirebbe un importante banco di prova per la teoria della relatività generale ed altre teorie gravitazionali.

In realtà si è già avuta una prova indiretta della esistenza delle onde gravitazionali grazie al lavoro dei due astronomi americani Russel Hulse e Joseph Taylor, che è valso loro il premio Nobel nel 1993. Nel 1974, infatti, essi scoprirono il sistema binario denominato PSR 1913+16 costituito da due stelle di neutroni rotanti l' una intorno all' altra; osservando il sistema per 4 anni, Taylor [13] notò una diminuzione del periodo P di rivoluzione al tasso di:

$$-\mathrm{dP}/\mathrm{dt} = (2.3 \pm 0.22)\cdot 10^{-12}\,\mathrm{sec\,sec}^{-1}$$

Tale valore risulta essere in ottimo accordo con la previsione teorica, basata sulla relatività generale, dovuta alla perdita di energia del sistema per emissione di onde gravitazionali [14]. La teoria prevede infatti:

$$-\mathrm{dP}/\mathrm{dt} = 2.4\cdot 10^{-12}\,\mathrm{sec\,sec}^{-1}$$

La diretta rivelazione delle onde gravitazionali emesse dal sistema PSR 1913+16 non è stata finora possibile in quanto esso emette onde periodiche principalmente ad una frequenza doppia rispetto a quella orbitale e cioè a circa 10^{-4}Hz, alla quale gli attuali rivelatori non sono sufficientemente sensibili.

La diretta rivelazione delle onde gavitazionali porterebbe molto probabilmente ad una nuova visione dell' universo grazie ad una astronomia basata sulle onde gravitazionali. Le onde elettromagnetiche su cui si fondano le nostre attuali conoscenze sono il risultato di sovrapposizioni incoerenti di emissioni da singoli atomi o molecole o particelle cariche; le radiazioni elettromagnetiche di origine cosmica, inoltre, provengono da regioni a bassa velocità, dove il campo gravitazionale è debole e, poichè non possono penetrare molto la materia senza venire assorbite o diffuse, forniscono in genere informazioni sulle caratteristiche superficiali delle sorgenti [7].

Le onde gravitazionali, al contrario, sono emesse con maggiore intensità in regioni dello spazio-tempo ove il campo gravitazionale è forte e le velocità relativistiche; grazie alle basse sezioni d' urto in gioco, inoltre, le onde gravitazionali possono attraversare facilmente vaste quantità di materia anche molto densa. Ne segue, quindi, che, se potranno essere rivelate, le onde gravitazionali forniranno informazioni riguardanti la struttura interna dei corpi celesti.

I rivelatori di onde gravitazionali odierni sono essenzialmente di due tipi: rivelatori risonanti e interferometri laser; poichè questa tesi è rivolta ai rivelatori risonanti, concentriamo su di essi l' attenzione.

Rivelatori risonanti a barra

Da un punto di vista sperimentale, la prima indicazione per la ricerca venne avanzata da J. Weber dell' Università del Maryland nel 1960 [15], il quale propose un rivelatore risonante basato su due punti materiali non in caduta libera ma legati da una forza di tipo elastico. In seguito all' arrivo di un' onda gravitazionale uno o più modi normali del sistema assorbono energia, il sistema si mette a vibrare e la rivelazione dell' onda diventa possibile.

L' esempio più notevole di un tale tipo di rivelatore è la barra risonante "alla Weber" costituita da un cilindro, solitamente di alluminio, di massa pari a qualche tonnellata, lungo qualche metro e risonante a ≈ 1KHz: quando tale sistema viene investito da un' onda gravitazionale che si propaga con direzione ortogonale all' asse longitudinale del cilindro, si ha un assorbimento di energia che è massimo nel caso in cui la frequenza dell' onda e quella del primo modo longitudinale siano coincidenti. Per impulsi gravitazionali la sezione d' urto integrata risulta [16], [17]:

$$\Sigma = 2\pi \frac{G}{c^3} M_b L_b^{\,2} \omega_0^{\,2} \qquad (1.14)$$

ove si è indicata con M_b la massa inerziale della barra, L_b la lunghezza del cilindro e ω_0 la pulsazione di risonanza. Ad esempio se M_b=1000 Kg, L_b=1m, ω_0=6.3KHz risulta allora $\Sigma = 6 \cdot 10^{-25} m^2$ Hz.

A causa della piccolezza delle sezioni d' urto coinvolte il segnale che è necessario leggere è estremamente debole: le barre risonanti di ultima generazione, ad esempio, sono pensate per rivelare onde di ampiezza h_0 minima $h_{min} \approx 10^{-20}$, il che corrisponde a osservare il primo modo longitudinale oscillare con ampiezze dell' ordine di 10^{-20} metri.

Studiamo ora la funzione di trasferimento di una barra di Weber per un' onda gravitazionale incidente in situazione ottimale, avente cioè direzione di propagazione perpendicolare all' asse longitudinale della barra e polarizzazione che presenta una simmetria rispetto a tale asse [18]. Sia ρ la densità del materiale costituente la barra e consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come in Fig.1.3, con l' origine in caduta libera.

Suddividiamo il cilindro in dischi elementari di spessore dz: all' equilibrio uno generico di tali dischetti avrà le facce distanti z e z+dz dall' origine. In seguito all' arrivo dell' onda si sviluppa una forza mareale di volume che, all' istante t, porta le facce del dischetto considerato rispettivamente a $\xi(z,t)$ e $\xi(z+dz,t)$. Si definisce allora la deformazione differenziale $\varepsilon(z,t)$ (nel seguito detta *strain*):

$$\varepsilon(z,t) = \frac{\xi(z+dz,t) - \xi(z,t)}{(z+dz) - z} = \frac{\partial \xi(z,t)}{\partial z}$$

Se σ è la forza elastica per unità di superficie che agisce su un dischetto (nel seguito detta *stress*), la legge di Hooke generalizzata si scrive:

$$\sigma = Y\varepsilon + D_p \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

ove D_p è un coefficiente che rende conto delle dissipazioni e Y è il modulo di Young. In termini di forze, e tenendo conto anche della forza per unità di volume f_g generata dall' onda gravitazionale, si ricava:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + f_g \qquad (1.15)$$

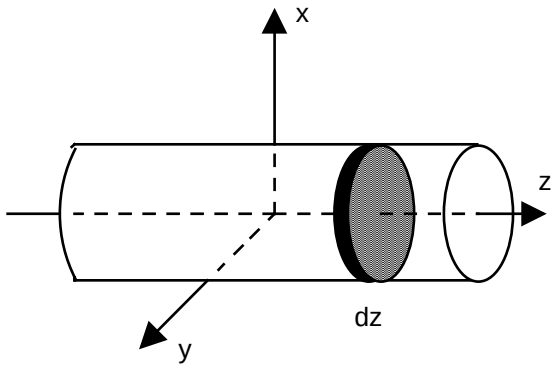

Fig. 1.3 Una barra nel sistema di riferimento considerato

Per trovare l' espressione di f_g si ricorre alla equazione della deviazione geodetica [1]; si dimostra che se l' origine del sistema di assi ortogonali di Fig.1.3 è in caduta libera allora due dischetti elementari posti simmetricamente a $\xi(z,t)$ e $\xi(-z,t)$ sentono, per effetto del passaggio di un pacchetto di onde gravitazionali descritto da h(t) incidente in modo ottimale, una accelerazione relativa:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} 2z \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

Poichè l' origine non è soggetta a forze, l' ultima espressione scritta equivale ad affermare che su ciascun dischetto agisce una forza:

$$f_g = \frac{1}{2} \rho z \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

Se si inserisce quest' ultima espressione nella (1.15) e si trasforma secondo Fourier, si ottiene una equazione differenziale non omogenea di II grado in Ξ, trasformata di Fourier di ξ. Imponendo le condizioni al contorno di origine del sistema

di riferimento in quiete (cioè $\Xi(z=0,\omega)=0$) e stress superficiale nullo alle estremità del cilindro (cioè $\sigma\left(z=\pm\frac{L_b}{2}\right)=0$), si ottiene:

$$\Xi(z,\omega)=\frac{1}{2}\left(z-\frac{\sin(\varphi z)}{\varphi\cos\left(\frac{\varphi L_b}{2}\right)}\right)H(\omega)$$

In tale espressione H(ω) è la trasformata di Fourier di h(t) e:

$$\varphi=\sqrt{\frac{\omega^2\rho}{Y+i\omega D}}=\sqrt{\frac{\omega^2\rho}{Y}\left(1-\frac{i}{Q}\right)}\ ;$$

Q=Y/ωD è il fattore di merito meccanico della barra alla prima frequenza di risonanza longitudinale. Ricordando che $\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ è la velocità υ di propagazione di un' onda longitudinale elastica nel mezzo, si ha per Q>>1:

$$\varphi\approx\frac{\omega}{\upsilon}\left(1-\frac{i}{2Q}\right)$$

In tal caso la funzione di trasferimento $T_b(z,\omega)=\Xi(z,\omega)/H(\omega)$ della barra per effetto dell' arrivo dell' onda gravitazionale presenta dei massimi relativi (risonanze) per:

$$\omega_n=(2n+1)\frac{\pi\upsilon}{L_b}\qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Si nota dunque che, nel caso della interazione di una barra di Weber con un' onda gravitazionale, la risonanza fondamentale si ha per n=0: tale modo corrisponde al primo modo longitudinale della barra. Le altre risonanze si hanno solo per le sue armoniche dispari.

Nel limite Q>>1 e $\omega\approx\omega_0$ si può approssimare la funzione di trasferimento della barra:

$$T_b(z,\omega)\approx\frac{L_b\omega_0\sin(\varphi z)}{\pi^2\left(\omega-\omega_0-\frac{i\omega_0}{2Q}\right)} \qquad (1.16)$$

L' andamento di $\left|T_b(z,\omega)\right|^2$ in funzione della pulsazione è illustrato in Fig.1.4 (in unità arbitrarie). A questo punto è necessario antitrasformare e sfruttare il teorema dei residui per ricavare:

$$\xi(z,t) = \frac{2L_b}{\pi^2} H(\omega_0)\omega_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\omega_0 t)\sin\left(\frac{\omega_0 z}{\upsilon}\right) \qquad (1.17)$$

Per $\omega \approx \omega_0$ e Q>>1, si ha dunque che lo spostamento rispetto all' equilibrio è massimo agli estremi e nullo al centro del cilindro (cfr. Fig.1.5); le oscillazioni decadono con un tempo caratteristico τ pari a:

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \qquad (1.18)$$

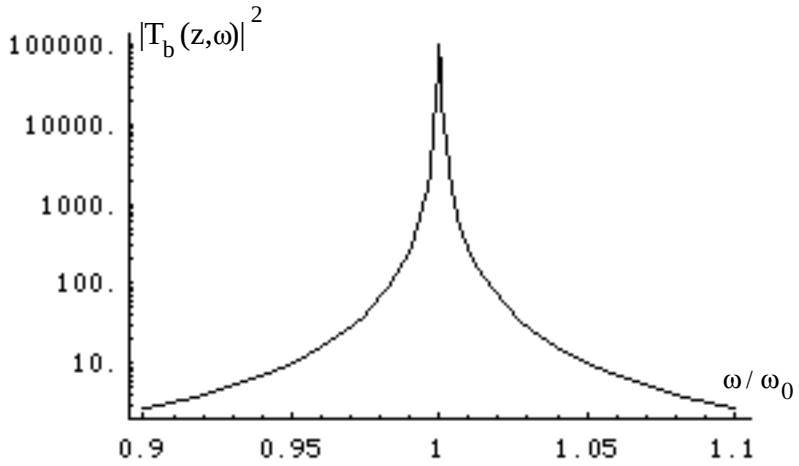

Fig. 1.4 Il modulo quadro della funzione di trasferimento di una barra nei pressi del modo longitudinale fondamentale, per z fissato. Unità arbitrarie

Si può verificare [18] che, per $z=L_b/2$, l' oscillazione (1.17) della barra in prossimità del primo modo longitudinale di pulsazione ω_0 è del tutto simile a quella di un oscillatore armonico smorzato di massa $m_b = \frac{M_b}{2}$, lunghezza a riposo $l_b = \frac{4L_b}{\pi^2}$, costante elastica $k = \omega_0^2 m_b$ e coefficiente di dissipazione $\beta = \frac{m_b \omega_0}{2Q}$ (cfr. Fig.1.6).

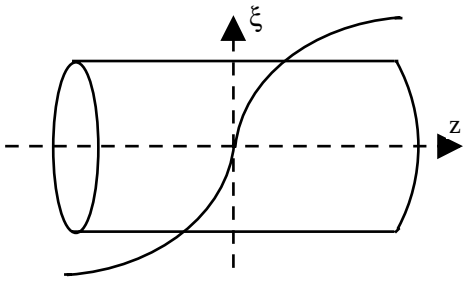

Fig 1.5 Ampiezza di oscillazione di una barra in corrispondenza al primo modo longitudinale.

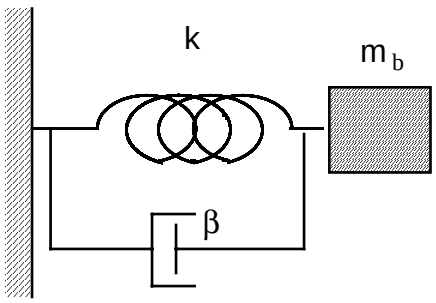

Fig. 1.6 Oscillatore armonico equilavente ad una barra di Weber.

Si può dimostrare [12] che, per un impulso di onde gravitazionali stardard centrato attorno a ω_0 e di durata $\pi/2\omega_0$, la minima ampiezza h_{min} a rapporto segnale-rumore unitario rivelabile da una barra a temperatura T, trascurando il contributo di rumore dell' amplificatore che torna indietro sulla barra (nel seguito indicato come back-action), è:

$$h_{min} \approx \frac{2\pi}{L_b}\left(\frac{K_B T S_{WB}}{M_b \omega_0 Q \alpha^2}\right)^{1/4} \qquad (1.19)$$

ove S_{WB} è la densità spettrale del rumore bianco a larga banda del sistema di amplificazione e α è il fattore di conversione da spostamento a voltaggio; K_B è la costante di Boltzman.

La (1.19) è molto utile al fine di comprendere il funzionamento dei rivelatori a barra: essi devono al contempo essere lunghi, massicci, possedere un alto fattore di merito meccanico Q, essere raffreddati alle più basse temperature possibili ed essere letti da un sistema di trasduzione e amplificazione il più efficiente e meno rumoroso possibile.

Nel 1969 Weber pubblicò un articolo [19] in cui sostenne di avere rivelato delle concidenze tra un rivelatore a barra a temperatura ambiente nel Argonne National Laboratory e degli altri nell' Università del Maryland. Come sistema di rivelazione egli si serviva di un sistema di cristalli piezoelettrici posti sulla superficie della barra in corrispondenza della sezione baricentrale ed in grado di rivelarne lo stress: in base alla Fig.1.5 e alla definizione di stress è evidente che esso è massimo in tale zona.

Anche se i risultati di Weber in base ai quali sostenne di avere rivelato le onde gravitazionali non hanno trovato conferma in una successiva analisi, l' avvenimento ebbe comunque una grande eco all' interno della comunità scientifica e suscitò un notevole interesse sugli esperimenti volti alla rivelazione di questo tipo di segnali.

In base alla (1.19) l' evoluzione del risonatore alla Weber ha portato allo sviluppo negli anni '80 di rivelatori criogenici e poi nei primi anni '90 di rivelatori ultracriogenici. Attualmente in operazione o prossimi all' operazione ci sono diversi rivelatori: le barre criogeniche ALLEGRO della Louisiana State University [20], EXPLORER del gruppo di gravitazionalisti romano ed installata al CERN [21], NIOBE della University of Western Australia [22] e le barre ultracriogeniche AURIGA presso i Laboratori Nazionali di Legnaro [23] e NAUTILUS pressi i Laboratori Nazionali di Frascati [24].

Poichè il lavoro di questa tesi è pensato per il rivelatore AURIGA, quest' ultimo verrà più sotto descritto in maggiore dettaglio.

§ 1.4 - Il rivelatore A.U.R.I.G.A.

Il rivelatore A.U.R.I.G.A. (acronimo di Antenna Ultracriogenica Risonante per l' Indagine Gravitazionale Astronomica) è nato come gemello di NAUTILUS, nell' ambito di un progetto dell' INFN di realizzare tra le due barre, ed altre simili, un osservatorio di onde gravitazionali, basato su un sistema di coincidenze ed anticoincidenze [25]. La realizzazione di questo rivelatore è iniziata nel 1991 ai Laboratori Nazionali di Legnaro (Padova) dell' INFN.

La barra è costituita da un cilindro di Al5056 di lunghezza $L_b \approx 3$m, diametro≈ 60cm, massa $M_b \approx 2300$Kg e risonanza del primo modo longitudinale a ≈ 875Hz (a temperatura ambiente); per tale sistema, in base alla (1.11) la sezione d' urto massima per l' interazione con onde gravitazionali risulta $\Sigma = 10^{-23} m^2$ Hz.

La scelta del materiale è legata all’ esigenza, evidente dalla (1.19), di realizzare un oscillatore meccanico con alto fattore di merito Q: la lega Al5056 dell' alluminio, particolarmente ricca di magnesio, può arrivare, a temperature di qualche decimo di grado Kelvin, a valori di Q di circa $3 \cdot 10^7$ [26], [27].

L' obbiettivo di AURIGA è di raggiungere una sensibilità tale da poter rivelare impulsi gravitazionali con ampiezza minima $h_{min} \approx 3 \cdot 10^{-20}$ in una banda di 50Hz attorno al modo fondamentale. In tal modo dovrebbe essere possibile spingere l' osservazione fino al gruppo locale di galassie (a distanze fino a qualche Mpc) e rivelare fino a qualche evento all' anno.

Per raggiungere una simile sensibilità, oltre a dovere raffreddare il rivelatore, è necessario ridurre drasticamente il rumore di origine sismica e utilizzare un sistema di lettura e amplificazione del segnale il più possibile efficiente e poco rumoroso.

Il raffreddamento di AURIGA [28] viene eseguito mediante la tecnica della refrigerazione a diluizione basata su una miscela degli isotopi ^{3}He e ^{4}He. Il criostato di AURIGA è schematizzato in Fig.1.6 e Fig.1.7; esso può essere diviso in due parti, ciascuna costituente una separata camera da vuoto: la camera di isolazione termica e la camera sperimentale vera e propria.

La camera di isolamento serve per mantenere alla temperatura dell' elio liquido (4.2K) il serbatoio dell' elio, capace 2000 litri. La schermatura termica viene ottenuta mediante due scatole cilindriche chiuse, una contenuta all' interno dell' altra, realizzate in alluminio e rivestite da diversi strati di materiale altamente riflettente (mylar alluminato). Il primo schermo è a T=100K, il secondo a T=20K.

La camera sperimentale alloggia il rivelatore: essa è dotata di tre scatole di rame cilindriche disposte l' una all' interno dell' altra. Esse servono per termalizzare il rivelatore e sono in contatto termico con punti del refrigeratore a diverse temperature: quando il refrigeratore viene posto in funzione, il primo involucro è a T=1.5K, il

secondo a T=200mK, il terzo a T=100mK. A tale ultimo involucro viene connesso un cavo di rame il quale sospende la barra, cingendone la sezione baricentrale.

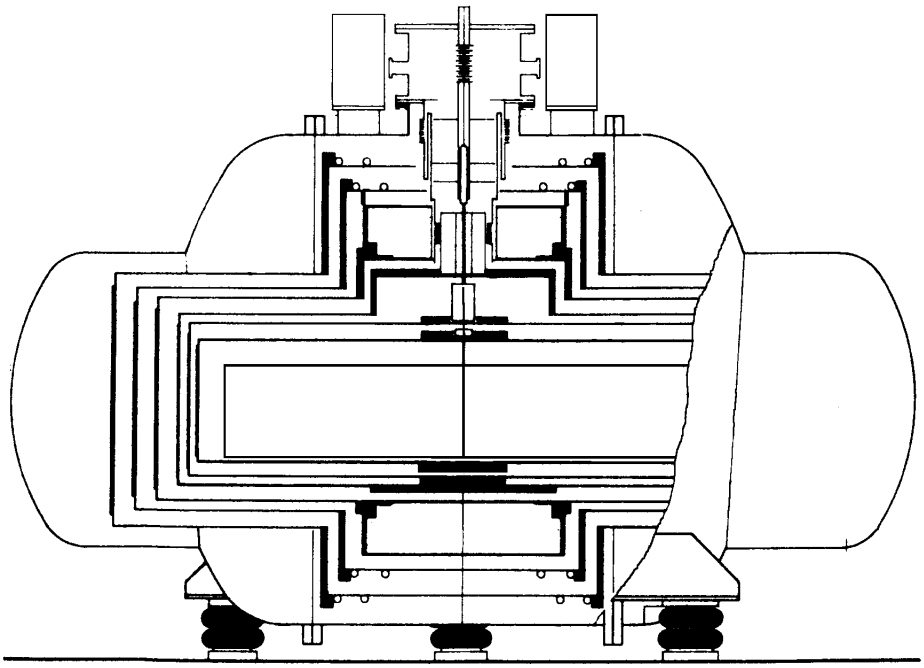

Fig. 1.6 Sezione longitudinale del criostato AURIGA

I cinque schermi termici all' interno del criostato ed il contenitore dell' elio presentano ciascuno un foro passante nel quale viene calato il refrigeratore: quest' ultimo costituisce l' unica connessione diretta tra la camera sperimentale e l' ambiente esterno.

Il sistema di raffreddamento del rivelatore è intimamente connesso con il sistema di attenuazione del rumore meccanico/acustico interno ed esterno al criostato: all' esterno costituiscono sorgente di disturbo le vibrazioni sismiche ambientali e l' attività umana, all' interno l' ebollizione dei liquidi criogenici e il flusso dei gas evaporati. Per ridurre tali rumori si fa uso di filtri meccanici. Ciascuno di essi può essere pensato, in termini semplici, come costituito da una molla ed una massa: per frequenze superiori alla frequenza propria del sistema, il comportamento è analogo a quello di un passa-basso e si ha dunque uno smorzatore. All' interno del criostato gli schermi termici possono essere visti come le masse e i cavi che ne realizzano le sospensioni come le molle di una serie di filtri meccanici: entro il criostato, dunque, si ha una cascata di filtri meccanici che realizzano una attenuazione totale misurata di circa 240dB a 920Hz.

Per quanto riguarda la lettura e la amplificazione meccanica del segnale, il rivelatore AURIGA è dotato di un trasduttore capacitivo a classica geometria 'a

fungo', il cui primo modo a simmetria cilindrica è scelto in modo tale da risuonare assieme al modo longitudinale fondamentale della barra [29].

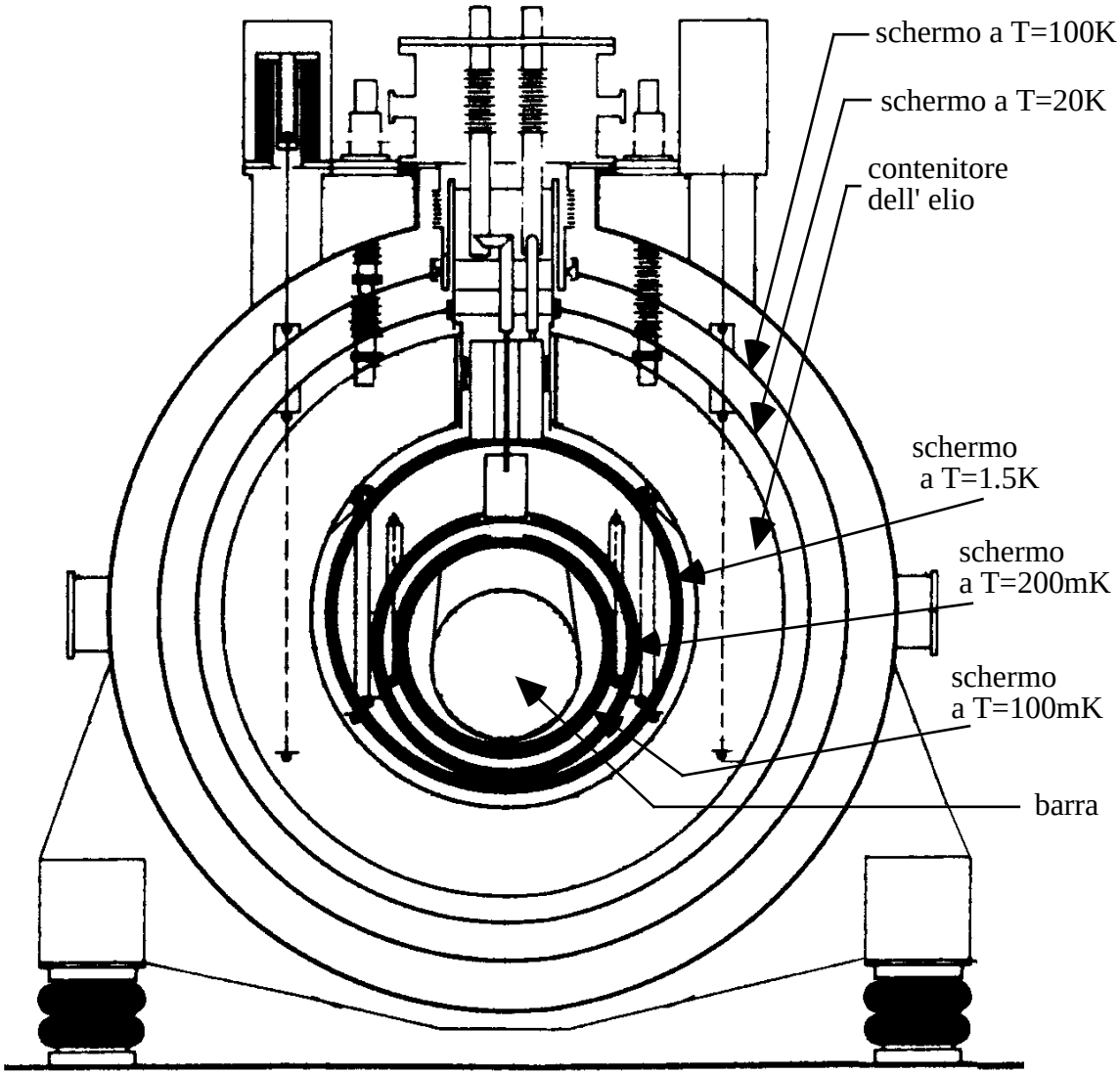

Fig 1.7 Sezione schematica del criostato AURIGA

Per amplificare il segnale si prevede di usare uno SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) alloggiato all' interno del criostato [28]; in fase diagnostica, comunque, lavorando lo SQUID solo a temperature inferiori a qualche Kelvin, l' amplificazione è realizzata mediante un FET (Field Effect Transistor) [30], attraverso una linea elettrica ausiliaria che porta il segnale del trasduttore all' esterno del criostato. La possibilità di passare da una catena di amplificazione all' altra è garantita da un interruttore elettromagnetico.

I concetti principali del trasduttore capacitivo, il funzionamento dello SQUID ed i suoi limiti verranno esposti nel prossimo capitolo, ove si evidenzieranno le motivazioni per questa tesi.

§ 1.5 - Bibliografia

[1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York (1972)

[2] R. A. Isaacson, Phys. Rev. **166** (1968) 1263

[3] R. A. Isaacson, Phys. Rev. **166** (1968) 1272

[4] B. F. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (1985)

[5] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1993)

[6] L. D. Landau, E. M. Lifsits, *Teoria dei campi*, Editori Riuniti Edizioni Mir , Roma (1985)

[7] K. S. Thorne, *Gravitational radiation*, in *300 Years of Gravitation*, edito da S. W. Hawking e W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge (1987)

[8] D. G. Blair, *Sources of gravitational radiation*, in *The detection of gravitational waves* edito da D. G. Blair, Cambridge University Press, Cambridge (1991)

[9] K. S. Thorne, *Gravitational Waves*, in *Proceedings of the Snowmass 95 Summer Study on Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology*, edito da E. W. Kolb e R. Peccei, World Scientific, Singapore, in stampa

[10] J. C. Wheeler, T. Piran e S. Weinberg, *Supernovae*, World Scientific, Singapore (1990)

[11] D. M. Eardley, in *Gravitational Radiation*, edito da Deruelle e T. Piran, North Holland, Amsterdam (1983)

[12] M. Cerdonio et al, *Experimental gravitation at very low temperatures*, in *Problems of fundamental modern Physics II*, edito da R. Cherubini, P. Dalpiaz, B. Minetti, World Scientific, Singapore (1991)

[13] J. H. Taylor, L. A. Fowler, P. M. McCulloch, Nature **277** (1979) 437

[14] P. C. Peters, Phys. Rev. **B 136** (1964) 1224

[15] J. Weber, Phys. Rev. **117** (1960) 306

[16] W. Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973)

[17] L. P. Grishchuk, Phys. Rev. **D 45** (1992) 2601

[18] G. Pizzella, *Fisica sperimentale del campo gravitazionale*, La Nuova Italia Scientifica, Roma (1993)

[19] J. Weber, Phys. Rev. Lett. **22** (1969) 1320
[20] N. Solomonson et al., *The 1991 LSU Gravitational Radiation Detector: modifications, performance, and prospects* in *Proceedings of the sixth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, edito da H. Sato e T. Nakamura, World Scientific, Singapore (1992)
[21] P. Astone et al., Phys. Rev. D **47** (1993) 2
[22] D. G. Blair et al, *Operation of the Perth cryogenic resonant-bar gravitational wave detector*, in *Proceeding of the fisrt E. Amaldi conference on gravitational wave experiments*, edito da E. Coccia, G. Pizzella, F. Ronga, World Scientific, Singapore (1995)
[23] M. Cerdonio et al., *Status of the AURIGA gravitational waves antenna and perspectives for the gravitational waves search with ultracryogenic resonant detectors*, in *Proceeding of the first E. Amaldi conference on gravitational wave experiments*, edito da E. Coccia, G. Pizzella, F. Ronga, World Scientific, Singapore (1995)
[24] P. Astone et al., Europhysics Letters **16** (1991) 231
[25] M. Cerdonio et al., Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 4107
[26] T. Sukuki et al., Phys. Lett. A **67** (1978) 2
[27] E. Coccia e T. O. Niinikoski, Lettere al Nuovo Cimento **41**(1984) 242
[28] L. Taffarello, *Messa a punto e calibrazione alle temperature criogeniche del rivelatore per onde gravitazionali A. U. R. I. G. A.* , tesi di dottorato di ricerca in Fisica, Univ. di Ferrara, A. A. 1995-96
[29] J. -P. Zendri, *Realizzazione della catena di rivelazione per l' antenna gravitazionale AURIGA: trasduttore elttromeccanico, amplificatore a SQUID, ottimizzazione*, tesi di dottorato di ricerca in Fisica, Univ. di Padova , A. A. 1991-92
[30] D. Carlesso, *Il rumore termico nel rivelatore per onde gravitazionali AURIGA*, tesi di laurea in Fisica, Univ. di Padova, A. A. 1994-95

Capitolo 2

I trasduttori risonanti

§ 2.1 - Calcolo di sensibilità di una barra risonante

In questo paragrafo vogliamo calcolare la sensibilità di una barra risonante come rivelatore di onde gravitazionali; a tale fine è necessario conoscere non solo la sua funzione di trasferimento (cfr. §1.3) ma anche le sorgenti di rumore. Seguendo la notazione introdotta in §1.3 indichiamo con $T_b(\omega)=T_b(L_b/2,\omega)$ la funzione di trasferimento della barra, calcolata su uno degli estremi. Supponiamo che la conversione del segnale di spostamento $X(\omega)$ dell' estremo della barra in segnale di tensione avvenga secondo la legge:

$$V(\omega) = \alpha X(\omega)$$

con α costante (cfr. Fig.2.1). In ingresso al sistema si hanno due forze: la forza $f_g(t)$ (la cui trasformata di Fourier indichiamo con $F_g(\omega)$) esercitata sulla barra da un impulso gravitazionale incidente, con trasformata di Fourier $H(\omega)$ e la forza stocastica di agitazione termica, la cui trasformata di Fourier indichiamo con $F_n(\omega)$. Si può calcolare che [1]:

$$F_g(\omega) = \frac{M_b L_b}{\pi^2}\omega^2 H(\omega) \qquad (2.1)$$

In uscita dall' amplificatore si somma il rumore in tensione V_n originato dalla catena elettronica.

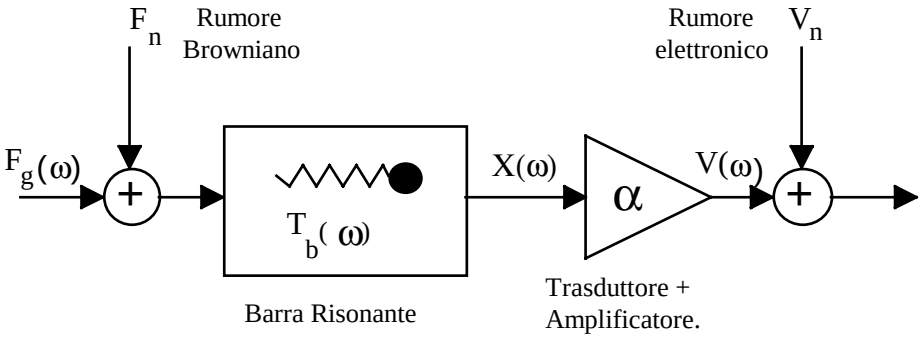

Fig. 2.1 Modello del sistema barra + trasduttore elettromeccanico + amplificatore con le sorgenti di rumore

Indichiamo lo spettro di potenza di V_n, che si assume bianco, con S_{WB} e indichiamo lo spettro di potenza di F_n con $S_F = \frac{M_b K_B T_{eq} \omega_0}{Q}$, secondo il teorema di Nyquist [2]. T_{eq} è la temperatura equivalente del sistema, che tiene conto della forza di retroazione che agisce sulla barra per effetto dell' amplificatore e che si riduce alla

temperatura termodinamica, quando tale forza è trascurabile. Lo spettro del rumore totale in uscita è allora:

$$S_{out}(\omega) = S_{WB} + \alpha^2 \left| T_b(\omega) \right|^2 S_F$$

ove S_{WB} e $\alpha^2 \left| T_b(\omega) \right|^2 S_F$ sono detti rispettivamente *rumore a banda larga* e *rumore a banda stretta*.

Consideriamo ora una forza impulsiva, agente sulla barra per effetto del segnale gravitazionale, del tipo:

$$f_g(t) = \frac{M_b L_b}{\pi^2} \omega_0{}^2 h \delta(t)$$

ove h rappresenta l' ampiezza dell' impulso gravitazionale e $\delta(t)$ la funzione delta di Dirac. Si può a questo punto calcolare il quadrato del rapporto segnale-rumore per unità di banda:

$$SNR^2(\omega) = \frac{\alpha^2 \left| T_b(\omega) \right|^2 \left(\frac{M_b L_b}{\pi^2} \omega_0{}^2 h \right)^2}{S_{out}(\omega)} \qquad (2.2)$$

da cui si ha il rapporto segnale-rumore SNR:

$$SNR = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} SNR^2(\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si è soliti esprimere la sensibilità di un rivelatore di onde gravitazionali in termini della minima ampiezza h_{min} di impulso rivelabile: si definisce h_{min} come il valore di ampiezza dell' impulso tale da fornire un rapporto segnale-rumore unitario:

$$h_{min} = \frac{\pi^2 \sqrt{2\pi}}{M_b L_b \omega_0{}^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \left| T_b(\omega) \right|^2}{S_{out}(\omega)} d\omega \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.3)$$

Le formule (2.2) e (2.3) sono spesso riferite all' ingresso della barra, piuttosto che all' uscita: per fare ciò basta definire lo spettro di potenza del rumore all' ingresso come:

$$S_{in}(\omega) = \frac{S_{out}(\omega)}{\alpha^2 \left| T_b(\omega) \right|^2}$$

In termini di S_{in}, dunque, h_{min} si scrive:

$$h_{min} = \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{M_b L_b \omega_0^{\,2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{S_{in}(\omega)} d\omega \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.4)$$

In Fig.2.2 riportiamo l' andamento di S_{in} in funzione della frequenza. Si osserva che, per $\omega = \omega_0$, S_{in} assume un valore minimo S_F: ciò è legato al fatto che la funzione di trasferimento della barra, come si è visto precedentemente, diventa molto grande vicino alla frequenza del modo fondamentale. Si può introdurre a questo punto il concetto di *banda ottima* $\Delta\nu_{opt}$ che è l' intervallo di frequenza ai cui estremi S_{in} assume il valore $2S_F$ (cfr. Fig.2.2).

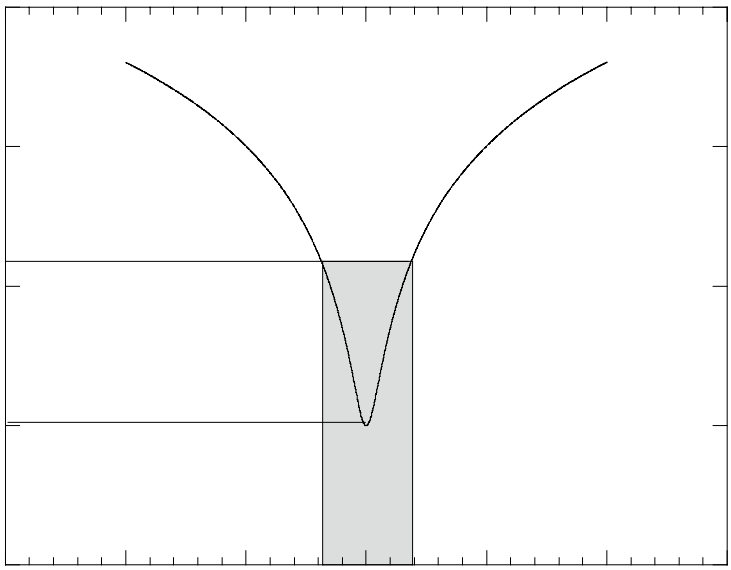

Fig. 2.2 Spettro di potenza del rumore all' ingresso, in funzione della frequenza

Si dimostra [3] che:

$$\Delta\nu_{opt} = \frac{\omega_0}{2\pi Q\sqrt{\Gamma}} \qquad (2.5)$$

ove $\Gamma = \frac{S_{WB}}{\alpha^2 |T_b(\omega)|^2 S_F}$ è il rapporto tra il rumore a banda larga e quello a banda stretta; nel caso di AURIGA si dovrebbe arrivare ad avere $\sqrt{\Gamma} \approx 10^{-6}$. Il significato di $\Delta\nu_{opt}$ sta nel fatto che nel calcolare l' integrale di (2.4) si può considerare solo l' area all' interno della banda ottima.

§ 2.2 - I trasduttori: introduzione

Come è stato evidenziato nel capitolo precedente, la caratteristica fondamentale dei rivelatori alla Weber è che essi lavorano in condizioni di risonanza: ciò permette alla barra di continuare ad oscillare anche dopo che l' impulso gravitazionale è passato, rendendo perciò possibile la rivelazione del segnale.

Lo svantaggio associato a un simile sistema è che esso è, per sua stessa natura, a banda stretta, come si è visto in §2.1: dopo il necessario stadio di amplificazione del segnale, il rapporto segnale-rumore SNR risulta essere maggiore di 1 solo in un intorno piuttosto stretto della frequenza del modo fondamentale della barra. Sarebbe invece molto utile avere rivelatori a banda la più larga possibile: ciò potrebbe essere ottenuto riducendo il rumore a banda larga intrinseco al sistema di amplificazione. Sarebbe in tal modo possibile rivelare onde gravitazionali in un intervallo più ampio di frequenze e risolvere meglio il tempo di arrivo ed i dettagli dell' impulso rivelato, grazie ad un più veloce campionamento del segnale. Tale ultima possibilità risulterebbe molto vantaggiosa ai fini di realizzare un sistema di anticoincidenze con altri rivelatori.

Il modo di allargare la banda dei rivelatori risonanti è legato al sistema di trasduzione del segnale: compito di un trasduttore è quello di convertire l' energia depositata dall' onda gravitazionale da meccanica a elettrica. I trasduttori realizzati finora possono essere divisi in due tipi fondamentali: *trasduttori passivi* (detti anche *lineari*) e *trasduttori parametrici* (detti anche *non lineari*). La fondamentale differenza tra le due classi è che, mentre i primi generano un segnale alla stessa frequenza del modo fondamentale della barra, i secondi operano a frequenza diversa.

Esula dagli scopi di questa tesi offrire una trattazione dettagliata e comparata dei vantaggi e degli svantaggi dei due tipi di trasduttore; a tal proposito si veda la esposizione che si trova nel riferimento [4]. Nel seguito verrà data attenzione ai trasduttori passivi in quanto sia il trasduttore capacitivo di AURIGA, sia il trasduttore ottico della cui ideazione e sviluppo ci si occupa in questa tesi, sono trasduttori di tale tipo. In particolare entrambi sono trasduttori risonanti: un trasduttore risonante può essere pensato come un oscillatore di massa m_t, inferiore alla massa m_b dell' oscillatore descrivente la barra alla quale è ancorato, ed avente frequenza ω_t propria uguale a quella del modo fondamentale della barra.

In base a quanto scritto nel §1.3, quindi, il sistema formato da una barra di Weber cui è ancorato un trasduttore risonante è schematizzabile come in Fig.2.3, ove si sono trascurati i termini dissipativi. Siano x(t) e y(t), $k_x = m_b\omega_0^{\,2}$ e $k_y = m_t\omega_t^{\,2}$ gli spostamenti, in funzione del tempo, rispetto alle posizioni di equilibrio e le costanti

elastiche rispettivamente dell' oscillatore-barra e dell' oscillatore-trasduttore (cfr. Fig.2.3); studiamo dapprima il caso in cui $\omega_t \neq \omega_0$.

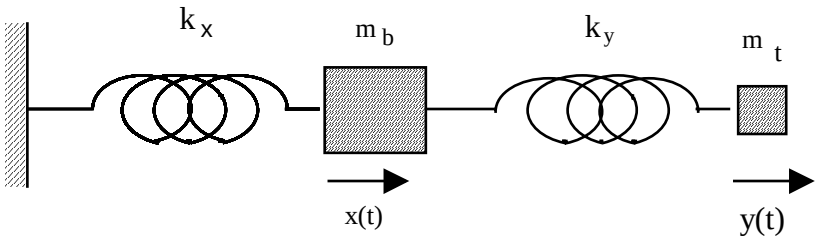

Fig. 2.3 Analogo del sistema formato da una barra e un trasduttore risonante

In presenza di forze esterne f_x e f_y che agiscono rispettivamente su m_b e m_t le equazioni del moto del sistema sono:

$$\begin{cases} m_b \ddot{x} + k_x x + k_y (x - y) = f_x \\ m_t \ddot{y} - k_y (x - y) = f_y \end{cases} \tag{2.6}$$

Passando al dominio delle pulsazioni tramite la trasformata di Fourier, che indichiamo con la lettera maiuscola, si ottiene:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{F_x}{m_b} \frac{\omega_t^2 - \omega^2}{D(\omega)} + \frac{F_y}{m_t} \frac{\mu \omega_t^2}{D(\omega)} \\ Y(\omega) &= \frac{F_x}{m_b} \frac{\omega_t^2}{D(\omega)} + \frac{F_y}{m_t} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + \mu \omega_t^2}{D(\omega)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

ove:

$$\mu = \frac{m_t}{m_b}$$

è il rapporto tra le masse e:

$$D(\omega) = \left(\omega_0^2 + \mu \omega_t^2 - \omega^2\right)\left(\omega_t^2 - \omega^2\right) - \mu \omega_t^4$$

è il determinante del sistema che si ottiene trasformando secondo Fourier il sistema omogeneo associato a (2.6).

Si hanno due risonanze quando D(ω) = 0 e cioè per:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left\{\omega_0^2 + \omega_t^2 (1 + \mu) \pm \sqrt{\left[\omega_0^2 + \omega_t^2 (1 + \mu)\right]^2 - 4\omega_0^2 \omega_t^2}\right\} \tag{2.8}$$

Notiamo inoltre che risulta:

$$\omega_+\omega_- = \omega_0\omega_t \tag{2.9}$$

$$\mu = \frac{(\omega_+^{\,2} + \omega_-^{\,2}) - (\omega_0^{\,2} + \omega_t^{\,2})}{\omega_t^{\,2}}$$

da cui:

$$\mu = \frac{\omega_0^{\,2}(\omega_+^{\,2} + \omega_-^{\,2}) - (\omega_0^{\,4} + \omega_+^{\,2}\omega_-^{\,2})}{\omega_+^{\,2}\omega_-^{\,2}} \tag{2.10}$$

Il caso del trasduttore risonante accoppiato alla barra si ha per $\omega_t = \omega_0$; si ottiene allora:

$$\omega_\pm = \omega_0\sqrt{\frac{1}{2}\left(2 + \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\mu}\right)} \approx \omega_0\left(1 \pm \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right) \tag{2.11}$$

ove l' ultima espressione è valida quanto più $\mu<<1$. In tale approssimazione, inoltre, e per $f_y=0$, $f_x \neq 0$ si ricava da (2.6) che:

$$\frac{Y(\omega_\pm)}{X(\omega_\pm)} = \mp\frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

Lo stesso risultato si ottiene anche se $f_x=0$, $f_y \neq 0$. Si è dimostrato dunque che, alle risonanze, l' ampiezza della oscillazione dell' oscillatore-trasduttore è superiore del fattore $1/\sqrt{\mu}$ rispetto a quella dell' oscillatore-barra: il trasduttore risonante realizza dunque una amplificazione meccanica della ampiezza di oscillazione della barra.

Va infine notato che solo se $\omega_t = \omega_0$ allora tutta l' energia della barra viene trasferita al trasduttore per effetto del battimento; si può definire a questo proposito un coefficiente η_t, rapporto tra l' energia E_t trasferita e l' energia totale E del sistema. Si dimostra [5] che:

$$\eta_t = \frac{E_t}{E} = \frac{4\omega_0\omega_t}{\omega_0^{\,2} + \omega_t^{\,2} + \mu\left[\left(\frac{\omega_t^{\,2}}{\omega_t^{\,2} - \omega_-^{\,2}}\right)^2\omega_-^{\,2} + \left(\frac{\omega_t^{\,2}}{\omega_t^{\,2} - \omega_+^{\,2}}\right)^2\omega_+^{\,2}\right]}$$

Se ω_0=5.6KHz e $\mu=10^{-3}$, per avere $\eta_t>0.5$ basta che sia $|\omega_0-\omega_t|<29$Hz e per avere $\eta_t>0.9$ è necessario che sia $|\omega_0-\omega_t|<9$Hz. La condizione di accordo tra le frequenze diventa più stringente al diminuire di μ, a parità di frequenza: se infatti $\mu=10^{-4}$ e $|\omega_0 - \omega_t| < 9$Hz allora si ha solo che $\eta_t>0.5$ ma se si desidera $\eta_t>0.9$ si deve avere $|\omega_0 - \omega_t| < 3$Hz.

§ 2.3 - Rivelatore risonante multimodo

Nei paragrafi precedenti si è esposto il problema della conversione del segnale meccanico in segnale elettrico e della larghezza di banda di un rivelatore risonante alla Weber. Si è anche anticipato come entrambe tali difficoltà possano essere risolte dal trasduttore. Vediamo ora in dettaglio come risolvere il problema della larghezza di banda; in seguito sarà esposta, nei casi del trasduttore capacitivo e del trasduttore ottico, la questione della conversione del segnale.

Si è visto nel § 1.3 come una barra di Weber sia assimilabile ad un oscillatore armonico avente pulsazione propria ω_0 coincidente con quella del modo fondamentale della barra e formato da una molla di una certa costante elastica collegata ad una massa pari a metà della massa della barra stessa. Il rivelatore risonante multimodo è schematizzabile, invece, come una cascata di n oscillatori armonici accoppiati, aventi masse via via decrescenti, come illustrato in Fig.2.4. L' idea di un simile rivelatore è stata presentata da J.-P. Richard [6] nel 1979 ma una trattazione matematica rigorosa è stata sviluppata solo di recente [7].

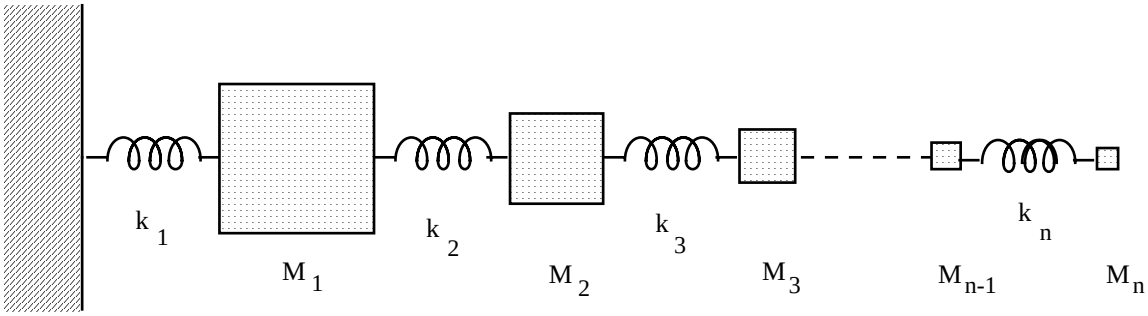

Fig. 2.4 Schema di un rivelatore risonante multimodo

Consideriamo dunque n masse come in Fig.2.4; in generale si pensa alla prima di tali masse come rappresentante la barra di Weber e all' ultima come a quella di cui il trasduttore misura lo spostamento. Il valore di tale ultima massa va scelto in base alle condizioni che si devono soddisfare per adattare l' uscita del rivelatore all' ingresso del sistema di amplificazione: esiste infatti un valore ottimo $M_{n,opt}$ per il quale si ottiene l' accoppiamento migliore. Sia r_m il rapporto tra due masse consecutive, che supponiamo essere costante:

$$r_m = \frac{M_{i+1}}{M_i} = \left(\frac{M_n}{M_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad i = 1, 2, ..., n-1; \qquad (2.12)$$

sia ω_0 la pulsazione di risonanza di ciascun oscillatore considerato singolarmente.

Quando gli n oscillatori sono connessi tra loro come in Fig.2.4 il sistema risultante avrà n modi normali: l' analisi può essere svolta scrivendo il sistema delle n equazioni del moto in forma matriciale [7].

J.-P. Richard ha dimostrato [6] che un rivelatore risonante multimodo presenta una larghezza di banda utile massima pari a :

$$\Delta\omega_{max} \approx 2\omega_0\sqrt{r_m} = 2\omega_0\left(\frac{M_{n,opt}}{M_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \qquad (2.13)$$

In virtù di questa ultima relazione e della (2.12), dunque, si può allargare la banda massima aumentando il numero di modi, fino a raggiungere il valore limite per $n \to \infty$. Va comunque osservato che l' aumento della banda risulta piuttosto lento per n>3, mentre invece le difficoltà tecniche crescono rapidamente: per n>4, infatti, la massa dell' ultimo risonatore deve essere molto piccola, inferiore ad 1gr [6], [8].

Tuttavia è evidente che l' accoppiamento tra gli oscillatori risulta cruciale se si vuole che l' energia rilasciata dall' impulso gravitazionale sulla prima massa venga trasferita per battimento dei modi all' ultima. In particolare si deve fare in modo che il fattore di merito meccanico Q_i dell' i-esimo risonatore sia maggiore di quello della barra, onde non degradare quest' ultimo. È intuitivo comprendere, infatti, che i fattori di merito si sommano 'in parallelo':

$$\frac{1}{Q_{tot}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Q_i} \qquad (2.14)$$

in quanto l' oscillatore con il più basso Q dà il maggiore contributo alla dissipazione dell' energia totale del sistema. Il sistema di Fig.2.4 presenta anche lo svantaggio che al rumore della barra e dell' amplificazione bisogna sommare i contributi di rumore termico di ciascun oscillatore.

In ultima analisi, dunque, è il rapporto segnale rumore che determina la larghezza di banda del rivelatore, come è stato sottolineato in [8]: si può dimostrare che la larghezza di banda massima aumenta con la radice del numero dei modi [9]. In Fig.2.5 riportiamo da [8] l' andamento della densità spettrale del rapporto segnale rumore SNR in funzione della frequenza, calcolato per un rivelatore a barra risonante multimodo perfettamente accoppiato.

Nella pratica i rivelatori a barra risonante di oggi sono a 2 o al massimo 3 modi. Il rivelatore AURIGA possiede 3 modi [10]: due dovuti a due oscillatori meccanici (la barra ed il trasduttore capacitivo) ed uno dovuto ad un oscillatore elettrico (circuito LC dovuto alla capacità-trasduttore con in parallelo una induttanza, prima dello SQUID).

Fig. 2.5 Densità spettrale del rapporto segnale-rumore, per un rivelatore a barra perfettamente accoppiato come da [8]

§ 2.4 - Il trasduttore risonante capacitivo e l' amplificatore a SQUID

Come si è già detto, il rivelatore AURIGA è dotato di un trasduttore risonante capacitivo [10]: la conversione del segnale da meccanico a elettromagnetico si basa sulla proprietà dei condensatori di variare la tensione ai capi delle armature, se varia la distanza tra esse a carica costante. In particolare se le armature del condensatore, poste a distanza d, sono state caricate da una carica costante Q_e allora una variazione Δd della loro distanza mutua comporta un segnale:

$$\Delta V = \frac{Q_e}{Cd} \Delta d \qquad (2.15)$$

ove C è la capacità del condensatore in quiete.

La formula (2.15) mostra che il fattore di conversione spostamento-voltaggio è il campo elettrico $E_0=Q_e/Cd$ applicato al condensatore. Il valore massimo di circa 10^7V/m, oltre al quale si ha la scarica nel vuoto, non permette di generare un segnale tale da sovrastare il rumore a banda larga del sistema di amplificazione. Per superare tale difficoltà si cerca di realizzare una amplificazione di tipo meccanico, prima ancora della conversione del segnale in elettrico. L' amplificazione meccanica viene realizzata mediante l' uso di un trasduttore risonante, secondo il principio esposto nel §2.2. Inoltre, l' uso del trasduttore risonante permette di adattare meglio l' impedenza di uscita al necessario stadio di amplificazione e di allargare la banda.

Fisicamente il trasduttore è costituito da due piatti affacciati, che sono le armature del condensatore: uno è solidale con la barra, l' altro costituisce una massa risonante alla stessa frequenza del primo modo longitudinale della barra. Quest' ultima armatura è agganciata al centro della barra mediante una specie di gambo, da cui il nome di "fungo" dato al trasduttore così realizzato. In particolare si accoppia al modo fondamentale della barra il primo modo flessionale simmetrico del piatto: il moto del sistema risultante è schematizzato in Fig.2.5.

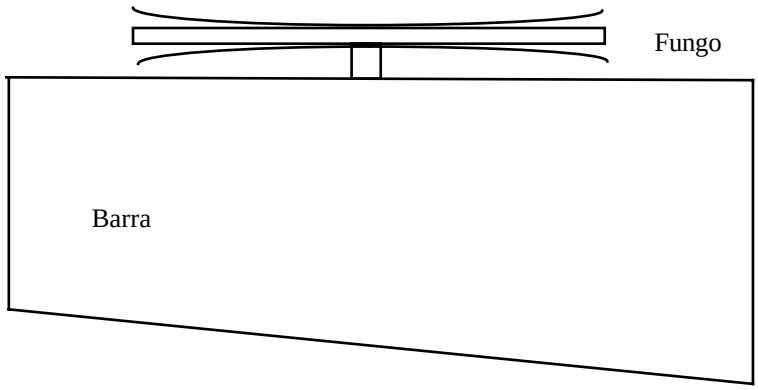

Fig. 2.5 Il moto di un trasduttore risonante capacitivo accoppiato ad una barra

Questo tipo di trasduttore è stato sviluppato negli anni '80 [11] ed è anche montato sulle barre del Gruppo romano (NAUTILUS ed EXPLORER). Il trasduttore montato su AURIGA [10] è realizzato nello stesso Al5056 di cui è fatta la barra, in modo da ottenere un alto fattore di merito meccanico Q e non degradare quello della barra.

Una volta convertito il segnale meccanico della barra in elettrico è necessario amplificarlo prima di poterlo acquisire ed elaborare. Heffner ha dimostrato nel 1962 [12] che, in base al principio di indeterminazione, non esistono amplificatori lineari non rumorosi. In generale un amplificatore lineare reale può essere schematizzato come un amplificatore ideale di guadagno G_a privo di rumore con in serie un generatore di tensione di rumore V_n ed in parallelo un generatore di corrente di rumore I_n (cfr. Fig.2.6).

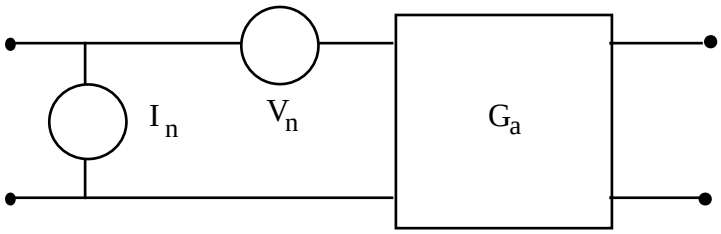

Fig. 2.6 Schema di un amplificatore reale in termini di un amplificatore ideale e di due generatori di rumore.

Se i generatori di rumore dell' amplificatore sono scorrelati [2] e indichiamo con $S_I(\omega)$ e $S_V(\omega)$ gli spettri di potenza della corrente e della tensione di rumore rispettivamente, si può definire l' energia di rumore dell' amplificatore come:

$$W(\omega) = \sqrt{S_V(\omega) S_I(\omega)}$$

e la temperatura di rumore come:

$$T_n(\omega) = \frac{W(\omega)}{K_B}$$

Risulta che, a frequenze di circa 1KHz, deve essere:

$$T_n(\omega) \geq \frac{\hbar\omega}{K_B \ln 2} \approx 7 \cdot 10^{-8} K$$

ove $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ e h è la costante di Planck. Lo schema di amplificazione del segnale elettrico di AURIGA, e di altre barre risonanti, prevede l' utilizzo di uno SQUID, come si è detto: questo è, ad oggi, l' amplificatore disponibile meno rumoroso alle frequenze attorno al KHz.

Uno SQUID è un misuratore di flusso magnetico che si basa sui concetti di quantizzazione del flusso in un superconduttore e delle relazioni di Josephson che regolano il passaggio per effetto tunnel delle coppie di Cooper (le coppie di elettroni che sono alla base del fenomeno della superconduttività) attraverso una giunzione resistiva tra due superconduttori. Esula dagli scopi di questa tesi descrivere il funzionamento dello SQUID: a tale proposito risultano utili i riferimenti [13], [14]. Diciamo comunque che esistono due tipi di SQUID: il primo, lo SQUID-dc, è costituito da un anello superconduttore interrotto da due giunzioni Josephson ed opera con una corrente costante di alimentazione. Il secondo tipo è quello dello SQUID-ac che è costituito da una giunzione Josephson che interrompe la corrente in un anello

superconduttore ed è pompato da un flusso a radiofrequenza. In genere è quest' ultimo tipo quello più diffusamente utilizzato; esso tuttavia risulta più rumoroso. Per tale ragione il rivelatore AURIGA è equipaggiato con uno SQUID-dc prodotto dalla Quantum Design, il quale ha una energia di rumore per unità di banda [15] di circa $3000\hbar$ alla temperatura di 0.1K.

§ 2.5 - Strategie per il futuro e motivazioni di questa tesi

Attualmente il limite alla sensibilità dei rivelatori a barra risonante equipaggiati con trasduttori passivi sembra essere dato principalmente dall' amplificatore SQUID impiegato. Uno studio svolto all' interno del gruppo di ricerca che lavora sul rivelatore LSU, riguardante uno SQUID commerciale del tutto analogo a quello di cui è dotata AURIGA, ha mostrato come, a temperature quali quelle che dovrebbero raggiungere i rivelatori ultracriogenici, si dovrebbe avere una energia minima di rumore per unità di banda dell' amplificatore [16]:

$$\varepsilon_{min} \approx 1400\hbar$$

Lo stesso studio ha evidenziato come il rumore dello SQUID scali con la temperatura secondo una legge lineare tipo:

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_0 + \alpha T$$

con $\alpha \approx 450\hbar / K$. Mentre il termine proporzionale alla temperatura è previsto dai calcoli sul rumore termico dello SQUID [17], non lo è il termine indipendente dalla temperatura il quale dà il maggiore contributo al rumore a T<1K; sono ancora allo studio le ragioni per l' esistenza di tale termine.

D' altra parte la minima ampiezza di impulso gravitazionale che un rivelatore risonante può rivelare corrisponde alla situazione ideale in cui si osserva un incremento di energia della barra pari ad un quanto. Sfruttando la analogia evidenziata nel §1.3 tra una barra di Weber ed un oscillatore armonico si ha:

$$\frac{1}{2} m_b \omega_0^{\,2} h_{min.q.}^{\,2} l_b^{\,2} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

Inserendo in quest' ultima relazione i valori tipici di Auriga si arriva alla sensibilità limite di:

$$h_{min.q.} = \frac{\pi^2}{2L_b}\sqrt{\frac{\hbar}{2M_b\omega_0}} = 3\cdot 10^{-21}$$

Da ciò è evidente che per sfruttare appieno le caratteristiche della barra sarebbe necessario avere amplificatori ben migliori di quelli usati finora.

Al fine di migliorare le prestazioni del rivelatore, la strategia che il gruppo AURIGA ha deciso di usare è da una parte di cercare di realizzare uno SQUID meno rumoroso, dall' altra di puntare su altri sistemi di trasduzione e lettura del segnale. In particolare è stata firmata una dichiarazione di intenti con J.-P. Richard e H. J. Paik della University of Maryland per lo sviluppo di un trasduttore, e della necessaria catena elettronica, tale che, se montato su AURIGA a temperatura inferiore a 1K, possa garantire di rivelare impulsi con h_{min} corrispondente a un' energia di rumore per unità di banda di $100\hbar$.

In particolare H. J. Paik dovrebbe realizzare un trasduttore di tipo induttivo [18] basato su di un amplificatore a SQUID; J.-P. Richard sta invece lavorando su un prototipo di un trasduttore ottico [19], il quale non necessita di uno stadio di amplificazione a SQUID. Il lavoro presentato in questa tesi si inserisce proprio in questo nuovo sforzo di ricerca: esso rappresenta un tentativo originale svolto nell' ambito del gruppo AURIGA di realizzare un trasduttore ottico che, una volta provato su una barra a temperatura ambiente e anche studiatene le caratteristiche a temperature criogeniche, possa essere montato sul rivelatore AURIGA.

La possibilità di avere due tipi di trasduttori funzionanti e completamente diversi, uno elettro-meccanico (a capacità o induttivo) ed uno ottico, risulta utile anche ai fini dei veti che si possono porre sui segnali della barra. Si potrebbe infatti montare due diversi trasduttori su una stessa barra e porli in risonanza con due distinti modi di vibrazione di essa. In tal modo, osservando quattro modi normali, diventano più stringenti le condizioni che il segnale letto deve soddisfare affinchè si possa affermare che esso è originato da un impulso gravitazionale [20], [21].

§ 2.6 - Bibliografia

[1] E. Amaldi, G. Pizzella, in *Relativity, Quanta and Cosmology,* edito da F. De Finis, Johnson Reprint Co., New York (1979)

[2] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic processes*, McGraw-Hill, Singapore (1984)

[3] M. Cerdonio, S. Vitale, *Ulteriori considerazioni sulla sensibilità dell' antenna ultracriogenica risonante per onde gravitazionali*, nota interna ai Laboratori Nazionali di Legnaro (1989)

[4] D. G. Blair, *The detection of gravitational waves*, Cambridge University Press, Cambridge (1991)

[5] G. Pizzella, *Fisica sperimentale del campo gravitazionale*, La Nuova Italia Scientifica, Roma (1993)
[6] J. -P. Richard, in *Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, edito da R. Ruffini, North-Holland, Amsterdam (1982)
[7] Y. Pang, *Analysis and development of a wide bandwidth gravitational wave detector*, tesi di Dottorato, Università del Maryland (1990)
[8] N. Solomonson et al., Phys. Rev. D **46** (1992) 2299
[9] A. Ortolan, comunicazione privata
[10] J. -P. Zendri, *Realizzazione della catena di rivelazione per l' antenna gravitazionale AURIGA: trasduttore elttromeccanico, amplificatore a SQUID, ottimizzazione*, tesi di dottorato di ricerca in Fisica, Univ. di Padova , A. A. 1991-92
[11] Y. Ogawa e P. Rapagnani, Il nuovo Cimento C **7** (1984) 21
[12] H. Heffner, Proc. IRE **50** (1962) 1604
[13] O. V. Lounasmaa, *Experimental principles and methods below 1K*, Academic Press, Londra (1974)
[14] J. Clarke, in *Superconducting electronics*, edito da H.Weinstock e M. Nisenoff, Springer-Verlag e NATO ASI, Berlino (1989)
[15] J. H. Claassen, J. Appl. Phys **46** (1975) 2268
[16] Z. K. Geng, Rev. Sci. Instrum. **64** (1993) 1319
[17] J. Clarke, in *Superconducting devices*, edito da S. T. Ruggiero e D. A. Rudman, Academic Press, New York (1990)
[18] H. J. Paik, J. Appl. Phys. 47 (1976) 1169
[19] J. -P. Richard, J. Appl. Phys. **64** (1988) 2202
[20] S. P. Boughn et al., Astrophys. J. **261** (1982) L19
[21] J. Chiang et al., Nucl.Instrum. Methods A **311** (1992) 603

Capitolo 3

Il trasduttore ottico

§ 3.1 - Introduzione al trasduttore ottico

Come si è precedentemente affermato, il lavoro presentato in questa tesi è volto alla realizzazione di un trasduttore risonante di nuova concezione per i rivelatori di onde gravitazionali a barra risonante ultracriogenici. Il trasduttore che si è pensato di costruire è tale da formare assieme alla barra un rivelatore a due modi: la considerazione che, nel passare da un rivelatore a due modi ad uno a tre modi, la larghezza di banda non aumenta tanto da giustificare le maggiori difficoltà tecniche, ci ha spinti appunto verso un rivelatore bimodale. È comunque possibile progettare e realizzare un trasduttore con funzionamento del tutto analogo a quello qui presentato ma tale da formare con la barra un rivelatore a tre o più modi. In tale senso il prototipo realizzato potrà servire anche come base per futuri sviluppi.

Analogamente al caso del trasduttore capacitivo di cui al §2.4, per il quale si ha un componente meccanico di una data geometria e un sistema di lettura strettamente connesso, anche per il trasduttore ottico la parte meccanica e di lettura del segnale sono intimamente legate. Per il momento concentriamo l' attenzione su come il segnale meccanico della barra possa essere trasdotto con mezzi ottici. Supponiamo per ora di poter realizzare una struttura meccanica risonante che formi con la barra il sistema di due oscillatori accoppiati di Fig.2.3; supponiamo anche di poter porre uno specchio sulla massa m_b rappresentante la barra ed un altro specchio sulla massa m_t rappresentante la struttura risonante (cfr. Fig.3.1). Nel seguito si vedrà come ciò sia possibile dal punto di vista meccanico.

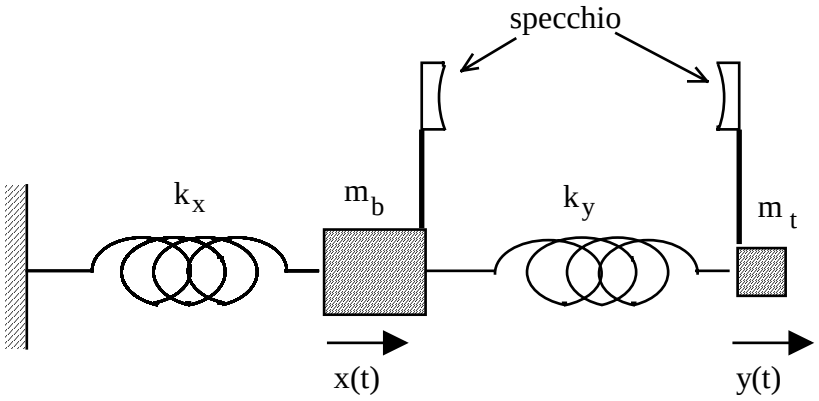

Fig. 3.1 Schema della barra accoppiata al trasduttore ottico

L' idea fondamentale del trasduttore ottico è di illuminare con un laser stabile in ampiezza e frequenza una cavità ottica, costituita dallo specchio sulla massa m_t e quello sulla massa m_b. In base a quanto esposto nel paragrafo §2.2, in seguito all' arrivo di un impulso gravitazionale alla frequenza del modo fondamentale

longitudinale della barra, la distanza tra i due specchi varia e di conseguenza varia la frequenza di risonanza della cavità ottica. Dal confronto tra la frequenza del laser e la frequenza di risonanza della cavità è possible determinare l' arrivo dell' impulso gravitazionale.

Nella pratica lo schema di funzionamento del trasduttore ottico è complicato dal fatto che non esistono laser sufficientemente stabili in ampiezza e frequenza: per questa ragione è necessario stabilizzare il laser, con la tecnica di Pound e Drever che descriviamo nel paragrafo §3.3; nel paragrafo §3.2, invece, descriviamo la cavità Fabry-Perot che sarà la cavità ottica del trasduttore.

§ 3.2 - Il risonatore Fabry-Perot

Un risonatore (o *cavità*) alla Fabry-Perot è costituito da due lastre parzialmente riflettenti parallele e separate da una distanza L_C, le quali sono attraversate da un' onda piana monocromatica propagantesi lungo la direzione perpendicolare alle lastre (cfr. Fig.3.2) [1].

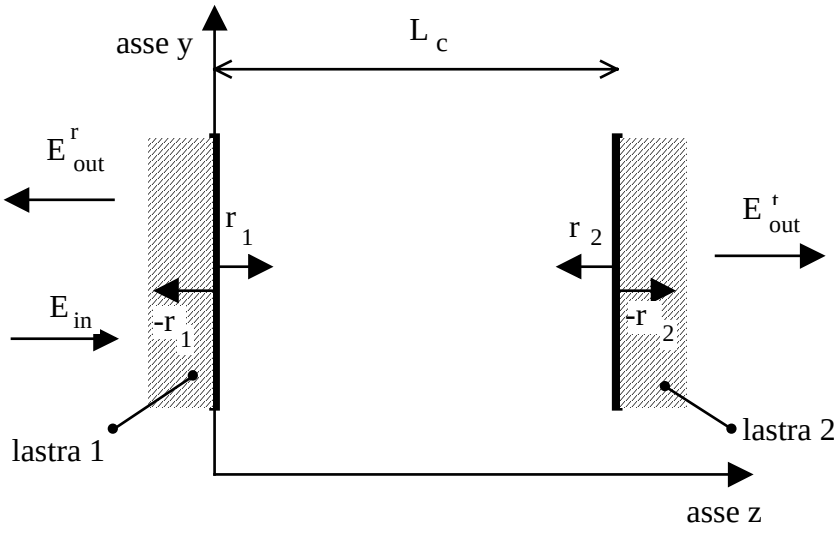

Fig. 3.2 Risonatore Fabry-Perot

Nella pratica le lastre sono costituite da un supporto di vetro, o di un materiale simile, su una delle cui superfici viene depositata una sottile pellicola di materiale (detta *coating*) che funge da supporto riflettente.

In riferimento a Fig.3.1, sia E_{in} il campo elettrico descrivente l' onda piana incidente:

$$E_{in}(t,z) = E_0 e^{i(\omega_L t - kz)} \qquad (3.1)$$

ove ω_L è la pulsazione dell' onda, k il numero d' onda e t la coordinata temporale. Consideriamo il caso reale in cui tra le lastre vi sia un mezzo che assorbe parzialmente la radiazione che lo attraversa, secondo un coefficiente α avente la dimensione dell' inverso di una lunghezza. Nell' attraversare le lastre la luce viene in parte assorbita, in parte riflessa e in parte trasmessa, dando luogo a fenomeni di interferenza multipla.

Per lo studio del risonatore Fabry-Perot seguiamo il classico testo di Born e Wolf [1], a cui ci rifacciamo per la notazione. Indichiamo con r_1, r_2 e t_1, t_2 i coefficienti di riflessione e trasmissione in ampiezza delle due lastre ripettivamente. Si definiscono la riflettività R_i e la trasmittività T_i per le lastre come:

$$R_i = r_i^{\,2} \; ; \; T_i = t_i^{\,2} \qquad\qquad i = 1, 2 \qquad\qquad (3.2)$$

Siano inoltre rispettivamente Σ_1, Σ_2 la frazione dell' intensità incidente sulla lastra 1 e 2 che viene assorbita o diffusa. In base alla conservazione dell' energia deve valere la relazione:

$$R_i + T_i + \Sigma_i = 1 \; i = 1, 2 \qquad\qquad (3.3)$$

Calcoliamo il campo elettrico E_{out}^{r} riflesso dalla cavità ed il campo elettrico E_{out}^{t} trasmesso in uscita; a tale scopo è utile definire il ritardo di fase introdotto tra le due lastre:

$$\delta = \frac{\omega_L \cdot L_c}{c} \qquad\qquad (3.4)$$

In base alle riflessioni multiple si ricava:

$$E_{out}^{r} = -E_{in} r_1 + E_{in} t_1^{\,2} r_2 e^{i2\delta} e^{-2\alpha L_c} + E_{in} t_1^{\,2} r_1 r_2^{\,2} e^{i4\delta} e^{-4\alpha L_c} + E_{in} t_1^{\,2} r_1^{\,2} r_2^{\,3} e^{i6\delta} e^{-6\alpha L_c} + \ldots.$$

$$E_{out}^{t} = E_{in} t_1 t_2 e^{i\delta} e^{-\alpha L_c} + E_{in} t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i3\delta} e^{-3\alpha L_c} + E_{in} t_1 t_2 r_1^{\,2} r_2 e^{i5\delta} e^{-5\alpha L_c} + \ldots. \qquad (3.5)$$

da cui, sfruttando la serie geometrica otteniamo:

$$E_{out}^{r} = E_{in}\left[-r_1 + \frac{t_1^{\,2} r_2 e^{i2\delta} e^{-2\alpha L_c}}{1 - r_1 r_2 e^{i2\delta} e^{-2\alpha L_c}}\right] \qquad E_{out}^{t} = E_{in} \frac{t_1 t_2 e^{-\alpha L_c} e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i2\delta} e^{-2\alpha L_c}} \qquad (3.6)$$

Da queste ultime relazioni si possono ricavare gli sfasamenti φ_r tra il campo elettrico riflesso rispetto a quello incidente e φ_t tra il campo elettrico trasmesso e incidente, che risultano:

$$\varphi_r = \operatorname{artg}\left(\frac{\left[1 - r_1^{\,2} - \Sigma_1\right] r_2 e^{-2\alpha L_c}}{-r_1 + r_2 e^{-2\alpha L_c}\left(1 + r_1^{\,2} - \Sigma_1\right)\cos 2\delta - (1 - \Sigma_1) r_1 r_2^{\,2} e^{-4\alpha L_c}} \sin 2\delta\right) \qquad (3.7)$$

$$\varphi_t = \text{artg}\left(\frac{1+ r_1 r_2 e^{-2\alpha L_c}}{1- r_1 r_2 e^{-2\alpha L_c}} \text{tg}\delta\right) \tag{3.8}$$

Prendendo i moduli quadri dei campi elettrici si passa alle intensità:

$$\frac{I_r}{I_{in}} = \frac{1}{1+B\sin^2\delta}\left[\frac{\left(r_1-(1-\Sigma_1)r_2 e^{-2\alpha L_c}\right)^2}{\left(1- r_1 r_2 e^{-2\alpha L_c}\right)^2} + B(1-\Sigma_1)\sin^2\delta\right] \tag{3.9}$$

$$\frac{I_t}{I_{in}} = \frac{t_1^2 t_2^2 e^{-2\alpha L_c}}{(1- r_1 r_2 e^{-2\alpha L_c})^2}\frac{1}{1+B\sin^2\delta} \tag{3.10}$$

ove I_r, I_t e I_{in} sono rispettivamente l' intensità della luce riflessa dalla cavità, trasmessa e incidente e:

$$B = \frac{4 r_1 r_2 e^{-2\alpha L_c}}{\left(1- r_1 r_2 e^{-2\alpha L_c}\right)^2} \tag{3.11}$$

La curva che descrive il rapporto tra le intensità trasmessa e incidente è chiamata curva di Airy; notiamo che essa presenta dei massimi per:

$$\delta = m\pi \qquad m = 0, 1, 2, 3, ... \tag{3.12}$$

In corrispondenza di tali massimi dell' intensità trasmessa, quella riflessa assume valori minimi. Quando la (3.12) è soddisfatta si dice che la cavità Fabry-Perot è in risonanza con la luce incidente.

Per le cavità Fabry-Perot è utile introdurre il concetto di *Free Spectral Range*, l' intervallo cioè in pulsazione tra due massimi consecutivi della (3.10) (indicato nel seguito come FSR). In base alla (3.4) si ha:

$$FSR = \frac{\pi c}{L_c} \tag{3.13}$$

Si introduce inoltre il parametro $\Delta\omega_{F.P.}$ che rappresenta la larghezza a mezza altezza dei massimi dell' intensità trasmessa:

$$\Delta\omega_{F.P.} = \frac{c}{L_c}\frac{1- r_1 r_2 e^{-2\alpha L_c}}{\sqrt{r_1 r_2}\, e^{-\alpha L_c}} \tag{3.14}$$

Si definisce altresì la *finezza* F come il rapporto tra il FSR e $\Delta\omega_{F.P.}$. In base a quanto appena visto si ha:

$$F = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}\, e^{-\alpha L_c}}{1- r_1 r_2 e^{-2\alpha L_c}} = \frac{\pi\sqrt{B}}{2} \tag{3.15}$$

In generale se il mezzo presente tra le lastre è l' aria, il coefficiente α per le frequenze ottiche è piccolo tanto che l' assorbimento può essere in ottima approssimazione trascurato, specie per lunghezze di qualche cm come nel caso della cavità-trasduttore.

Ad un' ulteriore semplificazione si arriva se si considera una cavità Fabry-Perot costituita da due lastre che abbiano le stesse caratteristiche per quanto riguarda la riflessione, la trasmissione e la perdita:

$$r_1 = r_2 = r = \sqrt{R} \qquad t_1 = t_2 = t = \sqrt{T} \qquad \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$$

In tale caso, e se le lastre sono in vuoto, si ha che:

$$\frac{I_r}{I_{in}} = \frac{1}{1 + B\sin^2\delta}\left(\frac{R\Sigma^2}{(1-R)^2} + B(1-\Sigma)\sin^2\delta\right); \qquad \frac{I_t}{I_{in}} = \frac{(1-R-\Sigma)^2}{(1-R)^2}\frac{1}{1+B\sin^2\delta}$$

ove ora risulta

$$B = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Inoltre:

$$\varphi_r = \text{artg}\left(\frac{1-R-\Sigma}{(1+R-\Sigma)\cos 2\delta - (1+R-R\Sigma)}\sin 2\delta\right) \qquad \varphi_t = \text{artg}\left(\frac{1+R}{1-R}\,\text{tg}\,\delta\right)$$

e la finezza diventa:

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\pi\sqrt{B}}{2}$$

Nelle Fig.3.3, Fig.3.4 mostriamo l' andamento in funzione di δ dei rapporti tra le intensità riflessa e trasmessa e l' intensità incidente per tre diverse cavità Fabry-Perot per le quali siano α=0, r_1=r_2, t_1=t_2 e Σ=0 .

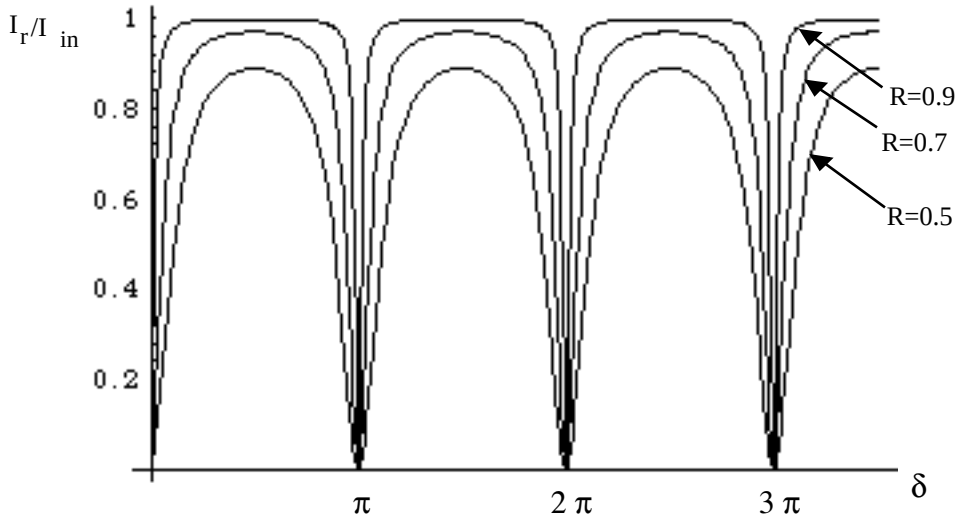

Fig 3.3 Rapporto tra l' intensita` della radiazione riflessa e l' intensita` della radiazione incidente per tre cavita` Fabry-Perot

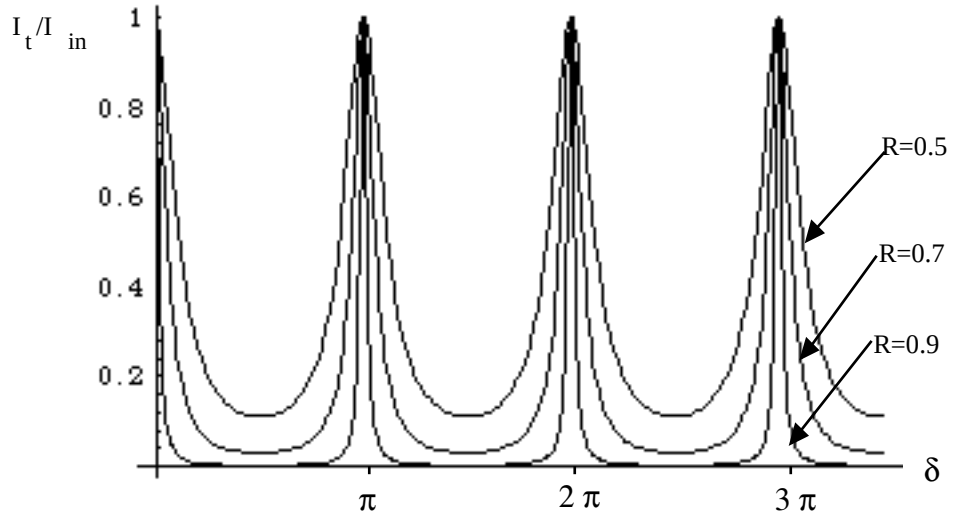

Fig. 3.4 Rapporto tra l' intensita` della radiazione trasmessa e l' intensita` della radiazione incidente per tre cavita` Fabry-Perot

Mostriamo inoltre l' andamento degli sfasamenti tra il fascio incidente sulla cavità e quello riflesso (in Fig.3.5) e trasmesso (in Fig.3.6). Queste figure si riferiscono a tre cavità Fabry-Perot per le quali $\alpha=0$, $r_1=r_2$, $t_1=t_2$ e per le quali il coefficiente di perdita Σ è stato considerato pari alla trasmittività. Le tre cavità differiscono per il valore di R.

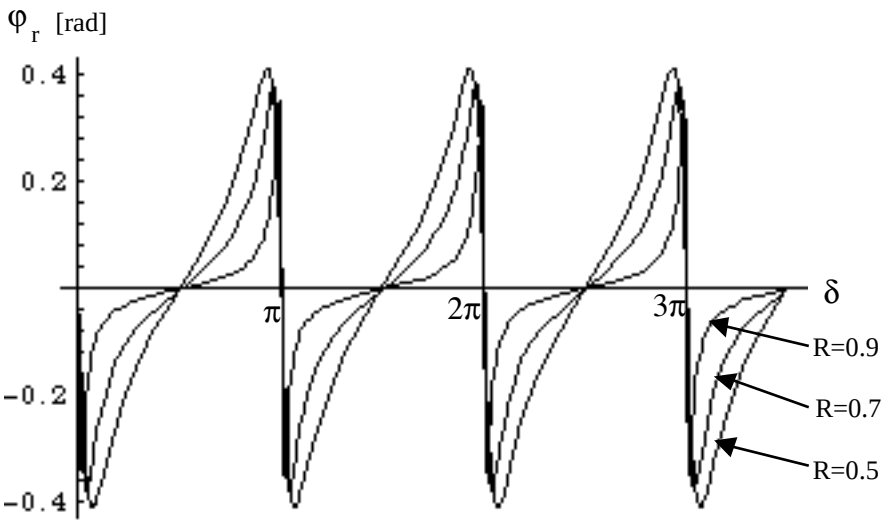

Fig. 3.5 Sfasamento tra la radiazione riflessa e incidente per tre cavita` Fabry-Perot

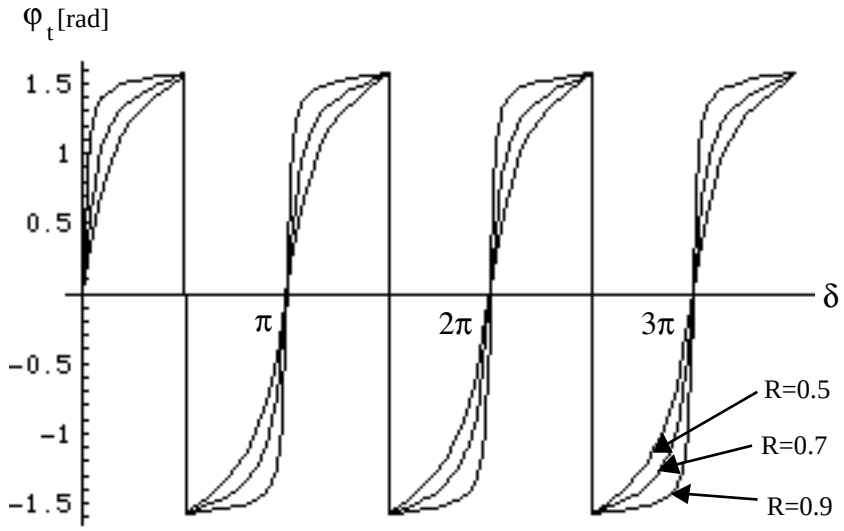

Fig. 3.6 Sfasamento tra la radiazione trasmessa e incidente per tre cavita` Fabry-Perot

Nella realtà una cavità Fabry-Perot non può essere formata da due specchi piani come in Fig.3.2, in quanto per diffrazione si avrebbero notevoli perdite cosicchè la cavità non sarebbe stabile e non sarebbe possibile ottenere la risonanza. Affinchè ciò non accada è necessario che almeno uno dei due specchi formanti la cavità Fabry-Perot abbia superficie curva; detti R_{c1} e R_{c2} i raggi di curvatura della superficie dello specchio 1 e 2 rispettivamente, si definisce, per ambo gli specchi, il coefficiente adimensionale g_i:

$$g_i = 1 - \frac{L_c}{R_{ci}} \qquad i = 1, 2 \qquad (3.16)$$

La condizione di stabilità che occorre soddisfare si scrive [2]:

$$0 < g_1 g_2 < 1 \tag{3.17}$$

Da tale condizione risulta chiaramente che il risonatore ottico costituito da due specchi piani paralleli è al limite della stabilità in quanto per esso risulta $g_1 g_2 = 1$.

Una volta garantita la stabilità, se si assicura ulteriormente che le dimensioni degli specchi sono tali che le perdite per diffrazione dai loro bordi siano inferiori alle perdite per assorbimento, all' interno della cavità si ha una serie di modi TEM_{ml} del campo elettromagnetico, ove m, l sono numeri interi indici del modo. Il modo che realizza le minori perdite per diffrazione risulta essere il primo simmetrico TEM_{00}. Per esso il profilo di intensità è gaussiano nei piani perpendicolari all' asse ottico z (cfr. Fig.3.7): la distanza radiale w in cui il valore del campo è 1/e del valore del campo sull' asse, per uno z fissato, si dimostra essere [2]:

$$w(z)^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda_L z}{\pi w_0} \right)^2 \right] \tag{3.18}$$

w_0 rappresenta le dimensioni minime del fascio, che si ottengono sul piano z=0, e viene detto waist; λ_L rappresenta la lunghezza d' onda della luce.

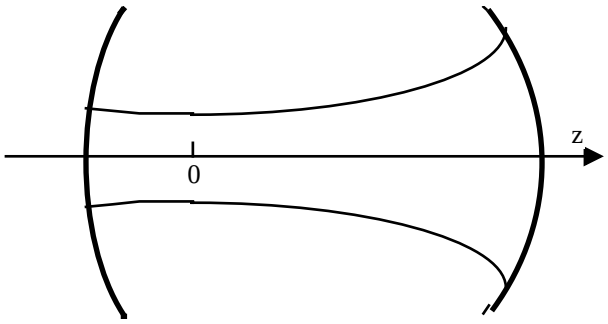

Fig. 3.7 Profilo del modo TEM_{00} di un risonatore costituito da due specchi con raggi di curvatura diversi

§ 3.3 - Aggancio in frequenza di un laser ad una cavità Fabry-Perot

Il problema di mantenere una cavità Fabry-Perot nella condizione di risonanza con il laser espressa dalla (3.12) è legato al rumore in frequenza del laser, e ai rumori termico, acustico e meccanico sugli specchi formanti la cavità. Gli approcci al problema sono generalmente due: il primo consiste nel modificare in tempo reale la posizione degli specchi della cavità, mediante l' uso eventualmente di attuatori piezoelettrici. Il secondo approccio è quello di agire invece sul laser, cambiandone opportunamente la frequenza. Nella realizzazione del trasduttore ottico, come si vedrà nel paragrafo successivo, si utilizzeranno entrambi i metodi.

Vediamo ora come, raccogliendo la luce riflessa da una cavità Fabry-Perot di lunghezza L_C, sia possibile ottenere un segnale di errore proporzionale alla differenza ν_N tra la frequenza $\nu_L=\omega_L/2\pi$ della luce laser che incide sulla cavità e una frequenza $\nu_C=\omega_C/2\pi$ per la quale la cavità sia in risonanza:

$$\nu_N = \nu_L - \nu_C \tag{3.19}$$

Tale segnale di errore può successivamente essere usato da un circuito di retroazione che agisca sul laser e faccia in modo che la sua frequenza sia pari a quella di risonanza ottica della cavità: ossia realizzi l' aggancio in frequenza del laser alla cavità. Lo stesso segnale può essere invece mandato, ad esempio, ad un attuatore piezoelettrico che mantiene la cavità in risonanza con il laser: in questo caso si dice che si aggancia in frequenza la cavità al laser.

Il metodo che usiamo per ottenere tale segnale di errore è quello di Pound e Drever [3], [4]. Lo schema di principio per l' aggancio alla Pound e Drever è illustrato nella Fig.3.8.

Sia:

$$E_A(t) = E_0 e^{i(\omega_C + \omega_N)t}$$

il campo elettrico dell' onda (supposta piana) prodotta dal laser in corrispondenza della sezione A di Fig.3.8. Per mezzo di un modulatore di fase si modula la fase del laser ad una frequenza $\Omega_m/2\pi$ che si sceglie essere minore del FSR della cavità Fabry-Perot ma maggiore della sua larghezza di riga:

$$FSR > \Omega_m > \Delta\omega_{FP} \tag{3.20}$$

In corrispondenza della sezione B di Fig.3.8, dunque, il campo elettrico è:

$$E_B(t) = E_0 e^{i(\omega_C t + \omega_N t + \beta \cos\Omega_m t)}$$

ove β rappresenta l' ampiezza della modulazione di fase. Dopo avere sviluppato tale espressione in termini delle funzioni di Bessel J_n si può scrivere in prima approssimazione:

$$E_B(t) \approx E_0 e^{i(\omega_C t+\omega_N t)}[J_0 + 2iJ_1(\beta)\cos\omega_m t]$$
$$\approx E_0 e^{i(\omega_C t+\omega_N t)}\left[J_0(\beta) + iJ_1(\beta)e^{i\Omega_m t} + iJ_1(\beta)e^{-i\Omega_m t}\right] \qquad (3.21)$$

Dunque il campo elettrico incidente sulla cavità Fabry-Perot ha tre componenti in pulsazione: una portante alla pulsazione ω_L del laser e due bande laterali a $\omega_L+\Omega_m$ e $\omega_L-\Omega_m$.

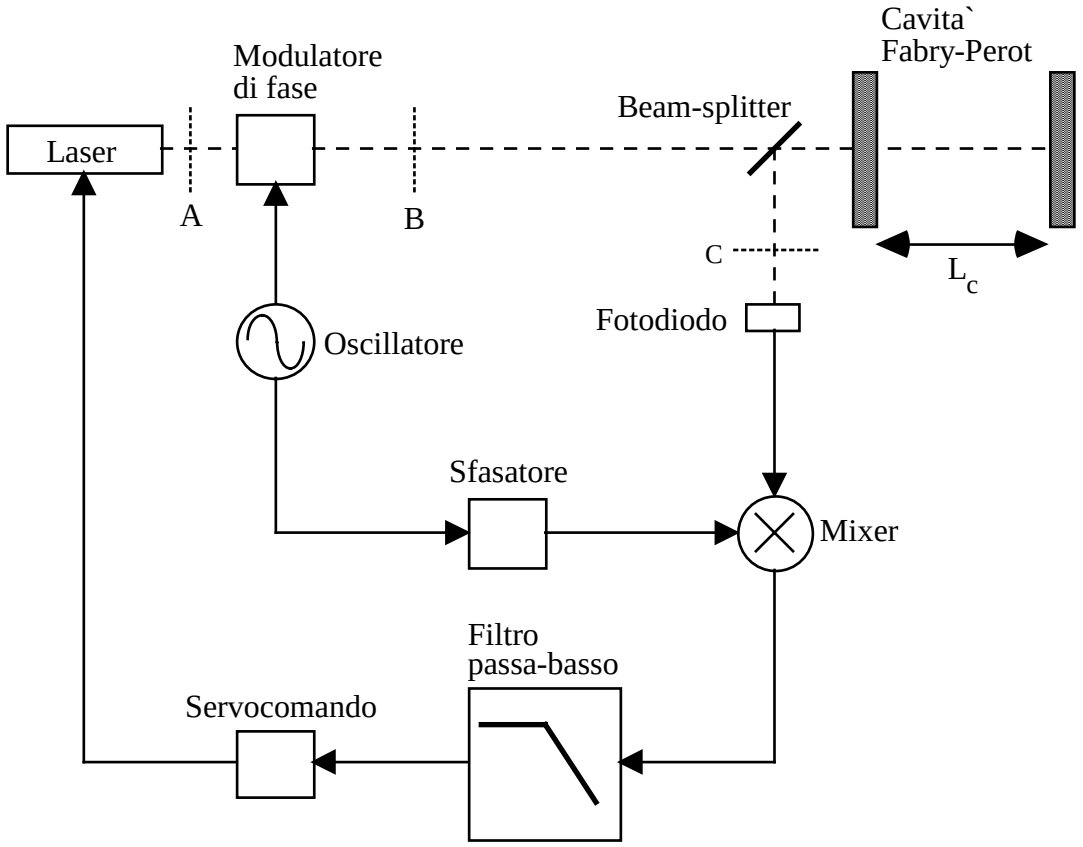

Fig. 3.8 Schema dell' aggancio in frequenza di un laser ad una cavita` Fabry-Perot secondo il metodo di Pound e Drever

Prima di incidere sulla cavità il fascio laser deve passare attraverso un beam-splitter, la riflettività di ciascuna faccia del quale indichiamo con γ_b; una volta riflesso dalla cavità il fascio viene ulteriormente riflesso dal beam-splitter e raccolto dal fotodiodo. In base a quanto visto nel paragrafo precedente e alla (3.20), le componenti con pulsazione $\omega_L+\Omega_m$ e $\omega_L-\Omega_m$ vengono riflesse dalla cavità pressochè senza essere diminuite di intensità ma acquistano un ritardo di fase rispettivamente $+\varphi_m$ e $-\varphi_m$.

Indichiamo con $H^r(\omega)$ il rapporto tra il campo elettrico riflesso da una cavità Fabry-Perot e quello incidente, secondo la (3.6).

Il campo elettrico in corrispondenza del punto C di Fig.3.8, incidente sul fotodiodo, è:

$$E_C(t) = E_0 e^{i(\omega_C t + \omega_N t)} \sqrt{\gamma_b (1-\gamma_b)} \left[J_0(\beta) H^r(\omega_C + \omega_N) + \right.$$
$$\left. + iJ_1(\beta) H^r(\omega_C + \omega_N + \Omega_m) e^{i\Omega_m t} + iJ_1(\beta) H^r(\omega_C + \omega_N - \Omega_m) e^{-i\Omega_m t} \right]$$

Se indichiamo con η_f la sensibilità del fotodiodo misurata in Ampere/Watt, allora la tensione da esso sviluppata è:

$$V_f(t) = \eta_f \frac{|E_C(t)|^2}{E_0^{\,2}} P_0 R_f$$

In questa espressione P_0 indica la potenza del fascio emesso dalla sorgente laser e R_f la resistenza di carico del fotodiodo. A causa del modulo quadro il segnale generato dal fotodiodo contiene una componente in continua, una alla pulsazione Ω_m e un' altra alla pulsazione $2\Omega_m$.

A questo punto il sistema di aggancio di Pound e Drever prevede l' utilizzo di un mixer, il quale moltiplica il segnale del fotodiodo per quello, sfasato di una quantità ϑ, dello stesso oscillatore che ha realizzato la modulazione di fase. In uscita dal mixer cioè si ha:

$$V_M(t) = \chi V_f(t) \cos(\Omega_m t + \vartheta)$$

ove si è indicata con χ l' efficienza del mixer. L’ uso del mixer permette di isolare la componente alla pulsazione Ω_m del segnale del fotodiodo.

Il segnale in uscita dal mixer presenta una componente in continua e componenti corrispondenti alla pulsazione della modulazione e alle sue prime armoniche. Il valore massimo del segnale si ha per $\vartheta = 0$; se il segnale del mixer viene fatto passare per un filtro passa-basso si riesce ad estrarre il solo termine in continua, che costituisce il segnale di errore cercato. Tale segnale di errore V_e può essere utilizzato da un servocomando che agisce sul laser e mantiene la cavità Fabry-Perot in risonanza. In figura Fig.3.9 mostriamo l' andamento del segnale in uscita dal filtro passa-basso per $\vartheta = 0$ in funzione di $\omega_N = 2\pi\nu_N$.

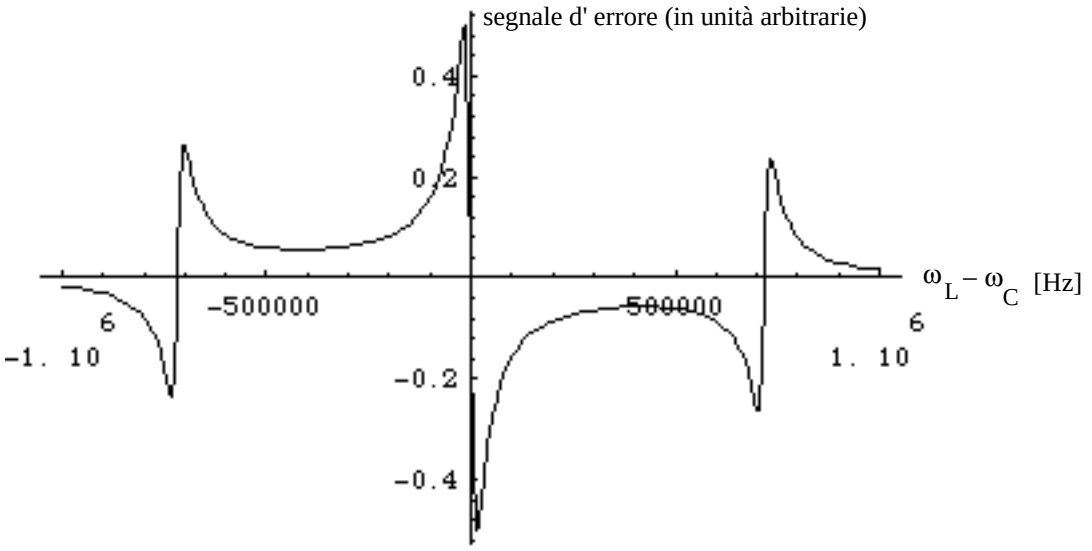

Fig. 3.9 Andamento del segnale di errore in funzione della differenza tra la frequenza del laser e la frequenza della cavità, in unità arbitrarie, per una cavità lunga 1m, con finezza=30000 e per una modulazione con pulsazione pari a 700KHz

Se la differenza ν_N in frequenza tra la frequenza ν_L del laser e la frequenza ν_C di risonanza della cavità è piccola, il segnale di errore ha un andamento lineare:

$$\delta V_e\big|_{\nu_N=0} = -8\chi\eta_f\gamma_b(1-\gamma_b)R_f\frac{T_1F^2}{\pi r_1}J_0(\beta)J_1(\beta)P_0\frac{L_c}{c}\delta\nu_N$$

ove T_1 è la trasmittività del primo specchio della cavità Fabry-Perot e r_1 il suo coefficiente di riflessione.

Indichiamo ora con V_{nr} la tensione sviluppata dal fotodiodo quando la cavità non è in risonanza:

$$V_{nr} = \eta_f\gamma_b(1-\gamma_b)R_fP_0$$

da cui:

$$\delta V_e\big|_{\nu_N=0} = -8\chi V_{nr}\frac{T_1F^2}{\pi r_1}J_0(\beta)J_1(\beta)\frac{L_c}{c}\delta\nu_N$$

Da ciò si ricava la pendenza della curva di discriminazione del metodo di Pound e Drever che è massima per $\nu_N=0$:

$$D_V^0 = \frac{\delta V_e\big|_{\nu_N=0}}{\delta\nu_N} = -8\chi V_{nr}\frac{T_1F^2}{\pi r_1}J_0(\beta)J_1(\beta)\frac{L_c}{c} \qquad (3.22)$$

Al variare dell' ampiezza β di modulazione il massimo valore della curva di discriminazione si ottiene per $\beta=1.08$: in tale situazione $J_0(\beta)J_1(\beta)=0.34$. La (3.22) mostra che cavità con finezza alta permettono di raggiungere una maggiore pendenza della curva di discriminazione.

§ 3.4 - Principio di funzionamento del trasduttore ottico

Lo schema di principio del trasduttore ottico è rappresentato nella Fig.3.10. Si fa uso di due cavità Fabry-Perot, dette *cavità-trasduttore* e *cavità-sensore*. La cavità-trasduttore, di lunghezza L_{ct}, è costituita da uno specchio posto su un supporto meccanico che risuona alla stessa frequenza del modo fondamentale della barra e da uno specchio solidale ad essa, come mostrato schematicamente nella Fig.3.1. La cavità-sensore, di lunghezza L_{cs}, è una cavità stabile in frequenza e che non presenta risonanze meccaniche con frequenze vicine a 1KHz: le due cavità devono poter andare in risonanza ottica con la stessa luce.

Il fascio prodotto da una sorgente laser viene modulato in fase secondo la tecnica di Pound e Drever precedentemente descritta; esso viene poi diviso in due fasci mediante il divisore di fascio beam-splitter1. Uno dei due fasci uscenti dal beam-splitter1 viene inviato attraverso una fibra ottica alla cavità-trasduttore: il segnale in riflessione dalla cavità, dopo essere tornato indietro per la stessa fibra, viene deviato da un divisore di fascio (beam-splitter2) e raccolto da un fotodiodo. Dalla tensione sviluppata da questo si estrae, secondo il metodo di Pound e Drever, un segnale di errore che viene utilizzato da un servocomando che aggancia in frequenza il laser alla cavità-trasduttore.

La necessità dell' utilizzo di fibre ottiche per il trasduttore è legata a motivi pratici: si pensa infatti di dover sistemare la sorgente laser in un luogo a temperatura ambiente. Invece si pensa di porre le cavità trasduttore e sensore entro il criostato in cui è alloggiata la barra.

In corrispondenza della sezione A di Fig.3.10 la frequenza ν_L del laser risulta essere pari ad una frequenza ν_{ct} per la quale la cavità-trasduttore è in risonanza ottica, a meno di una certa densità spettrale di rumore. Per capire quale e come sia tale spettro di rumore supponiamo per il momento di agganciare il laser non ad una cavità che abbia risonanze meccaniche ma ad una cavità idealmente stabile in frequenza. In tal caso la frequenza della cavità è fissa e il circuito di aggancio corregge la frequenza di riga del laser in modo tale da mantenerla più vicina possibile alla frequenza di risonanza ottica della cavità. Naturalmente la correzione è possibile solo fino ad un

certo livello: la frequenza del laser è mantenuta uguale a quella della cavità entro la bontà dell' aggancio. La densità spettrale (in Hz^2/Hz) della luce laser in corrispondenza della sezione A di Fig.3.10 è in questo caso la densità spettrale del segnale V_e di errore, convertita in frequenza tramite la curva di discriminazione. Come si vedrà nel prossimo paragrafo, tale rumore può essere considerato piatto in frequenza.

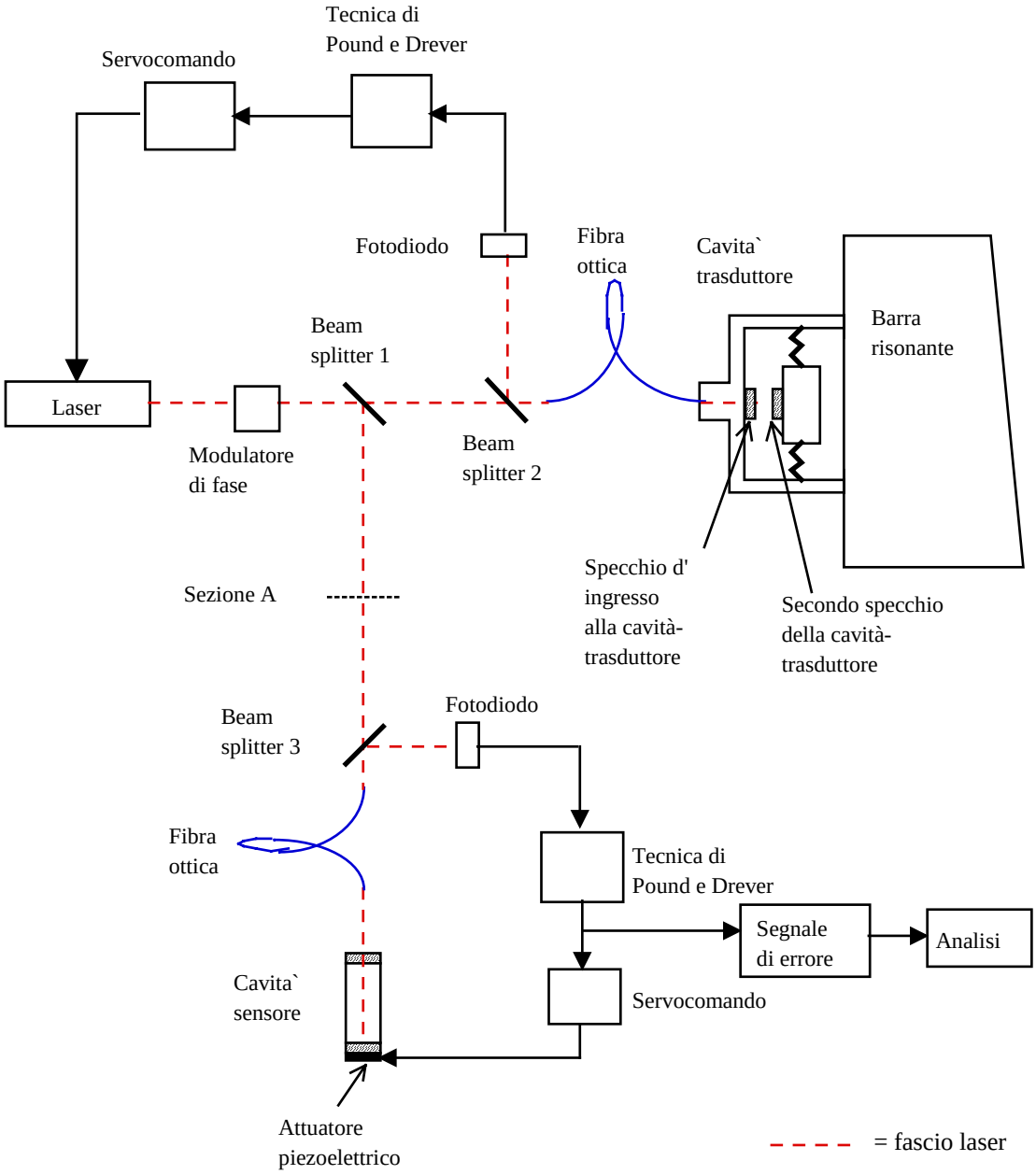

Fig 3.10 Schema del funzionamento del trasduttore ottico.

Torniamo ora alla situazione in cui la cavità-trasduttore alla quale si aggancia in frequenza il laser presenta le risonanze meccaniche dovute alla barra ed al trasduttore. In tale caso la frequenza ottica della cavità presenta uno spettro di rumore con due picchi attorno a 1KHz, dovuti tra l' altro al moto termico in corrispondenza delle risonanze meccaniche. Poichè il circuito di aggancio fa in modo che il laser segua in frequenza la cavità, a meno dell' errore di aggancio, lo spettro di rumore della frequenza del laser in corrispondenza della sezione A di Fig.3.10 presenta un fondo dovuto all' aggancio a cui si sovrappongono i due picchi delle risonanze meccaniche (cfr. Fig.3.11).

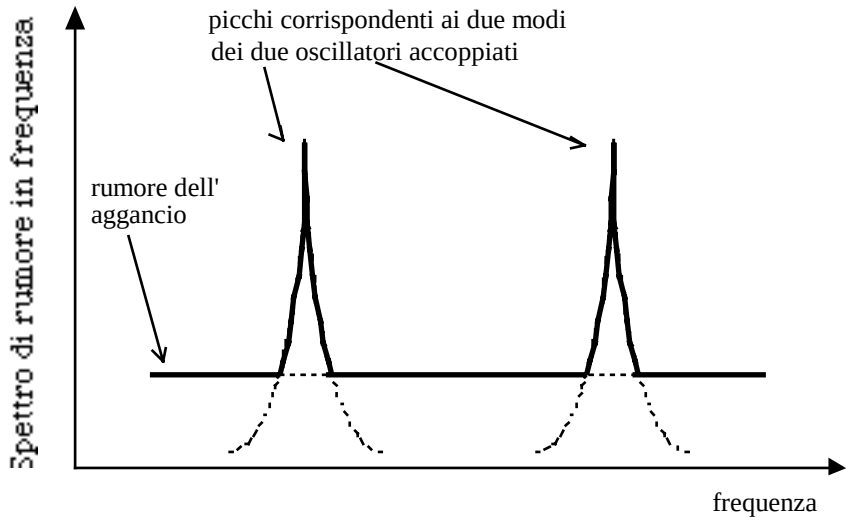

Fig. 3.11 Andamento della densità spettrale di rumore della frequenza del laser in corrispondenza della sezione A di Fig. 3.10, per frequenze attorno a 1KHz.

L' energia rilasciata da un impulso gravitazionale si sovrappone all' energia di rumore dei picchi. L' informazione che essi portano si può estrarre se si confronta questa luce con una seconda cavità, la cavità-sensore, che abbia ν_{ct} come frequenza di risonanza ottica. Il trasporto della luce laser alla cavità-sensore è realizzato mediante una fibra ottica. La luce riflessa da questa cavità, dopo essere tornata indietro per la stessa fibra, viene deviata tramite un divisore di fascio (beam-splitter3) e raccolta da un fotodiodo. Il segnale da esso prodotto viene processato secondo la tecnica di Pound e Drever: in tal modo si ottiene un segnale di errore V_{es} che è legato alla differenza tra la frequenza della luce laser e la frequenza di risonanza ottica della cavità-sensore. Come si è detto la cavità-sensore ha la stessa frequenza di risonanza ottica della cavità-trasduttore. Tuttavia, per essere certi che la cavità-sensore sia in condizione di risonanza, ne si corregge la lunghezza tramite un attuatore piezoelettrico comandato da un servomeccanismo che aggancia la cavità al laser. La banda di guadagno di questo circuito di retroazione si mantiene limitata alle frequenze inferiori a 1KHz, ove

ci si aspetta il segnale gravitazionale. In tal modo, per le frequenze alle quali il servocomando non realizza l' aggancio, il segnale di errore V_{es} ha uno spettro di rumore che risulta dalla sovrapposizione del rumore della cavità-sensore e del rumore della luce laser incidente.

Tale spettro di rumore costituisce dunque il segnale che va analizzato al fine di rivelare l' arrivo di un impulso gravitazionale. Affinchè ciò sia possibile è necessario che la cavità-sensore introduca poco rumore per frequenze attorno a 1KHz, in modo da non degradare il rapporto segnale-rumore e non ridurre la banda utile del rivelatore.

Prima di svolgere nella sua completezza il calcolo di sensibilità vediamo gli ordini di grandezza in gioco. Affinchè possa essere considerato competitivo rispetto al trasduttore capacitivo, il trasduttore ottico dovrebbe essere tale da poter garantire, quando accoppiato ad una barra alla temperatura T=0.1K, un valore di h_{min} di circa 10^{-20} ed una banda ottima $\Delta\nu_{opt}$ di circa 50Hz. Indichiamo al solito con l_b la lunghezza a riposo dell' oscillatore equivalente alla barra e con m_b la massa; sia inoltre m_t la massa efficace del trasduttore pensato come oscillatore accoppiato alla barra. Per questo calcolo sugli ordini di grandezza si può supporre ragionevolmente m_t=1Kg.

La relazione (2.5) esprime la banda ottima in funzione del rapporto Γ tra le densità spettrali dei rumori a banda larga S_{WB} e a banda stretta S_{NB}, della frequenza di vibrazione della barra e del suo fattore di merito Q, nel caso in cui non si abbia un trasduttore risonante. A parte un fattore $\sqrt{2}$ a moltiplicare, la formula resta valida, in buona approssimazione, anche nel caso in cui alla barra sia accoppiato un trasduttore risonante; in tale situazione, però, occorre sostituire alla frequenza della barra quella dei due modi ed al fattore di merito della barra quello dei due modi. Note la dinamica del sistema a due oscillatori accoppiati e la temperatura termodinamica, se si impone che la banda sia di 50Hz si ricava la densità spettrale del rumore a banda larga. Così facendo si ottiene che il livello di rumore a banda larga sul trasduttore risonante deve essere:

$$\sqrt{S_{WB}} = \sqrt{2S_{NB}}\,\frac{\nu_{\pm}}{Q_{\pm}\Delta\nu_{opt}} \approx 3\cdot 10^{-20}\,\frac{m}{\sqrt{Hz}}$$

Ciò vale nella approssimazione in cui il contributo di rumore a banda stretta dovuto al sistema di trasduzione e lettura del segnale sia trascurabile rispetto a quello dovuto alla agitazione termica. Nel calcolo si è considerato un fattore di merito meccanico di circa $5\cdot 10^6$.

A questo punto occorre controllare se il valore trovato per il rumore a banda larga è tale da garantire una buona sensibilità al rivelatore in termini di ampiezza minima di impulso standard rivelabile. A tal fine occorre scrivere il rumore termico a

banda stretta S_{NB} come densità spettrale di rumore in forza S_F (espresso in N^2/Hz) e definire la temperatura effettiva T_{eff} del rivelatore:

$$T_{eff} = \frac{2}{K_B}\sqrt{S_F S_{WB}}$$

Si può dimostrare [5] che in buona approssimazione il prodotto $K_B T_{eff}$ è pari alla minima fluttuazione di energia rivelabile. Di conseguenza:

$$h_{min} \approx \sqrt{\frac{K_B T_{eff}}{\frac{1}{2} m_t \omega_{\pm}^{\ 2} l_b^{\ 2}}} \approx 3 \cdot 10^{-20}$$

che è un risultato soddisfacente.

Come si vedrà nel paragrafo successivo, nel caso del trasduttore ottico il rumore a banda larga è dato principalmente dal rumore shot originato dalla corrente del fotodiodo che riceve il segnale riflesso dalla cavità-trasduttore. Tramite la curva di discriminazione di Pound e Drever questo rumore in tensione viene convertito in rumore in frequenza. È necessario convertire dunque il livello di rumore a banda larga S_{WB} ottenuto in termini di rumore in frequenza $S_{\nu\nu}$, per sapere quanto bene è necessario riuscire ad agganciare il laser alla cavità-trasduttore. Risulta:

$$\sqrt{S_{\nu\nu}} = \sqrt{S_{WB}}\,\frac{\nu_L}{L_{ct}} \approx 1\frac{mHz}{\sqrt{Hz}}$$

ove ν_L è la frequenza del laser che poniamo essere $2.8 \cdot 10^{14}$Hz e L_{ct} la lunghezza della cavità-trasduttore che poniamo essere 1cm. Il circuito di aggancio, dunque, deve presentare un livello di rumore pari a circa $1mHz/\sqrt{Hz}$ ed essere piatto in una regione attorno a 1KHz; un simile risultato è già stato raggiunto sperimentalmente [6], [7].

Il livello di rumore termico al trasduttore ci si aspetta essere dell' ordine di $10^{-14} m/\sqrt{Hz}$, alle frequenze corrispondenti ai due modi di (2.10), o, equivalentemente, $300Hz/\sqrt{Hz}$. Ci si aspetta, dunque, che il segnale di errore prodotto dalla tecnica di Pound e Drever sulla cavità-sensore, che costituisce il segnale utile per la rivelazione delle onde gravitazionali, presenti, in frequenza, un fondo piatto a cui si sovrappongono due picchi molto più alti corrispontenti al rumore termico dei due modi del rivelatore. Andando a monitorare gli incrementi in energia del valore del segnale sui due picchi e sottoponendo i dati al filtraggio ottimo di Wiener-Kolmogorov [8], si dovrebbe poter rivelare l' arrivo di un pacchetto impulsivo di onde gravitazionali. Per il calcolo completo della sensibilità del rivelatore si rimanda al paragrafo successivo.

Il trasduttore ottico ideato da J.-P. Richard [9] è diverso da quello qui sopra esposto, anche se entrambi fanno uso di cavità Fabry-Perot e prevedono un sistema di aggancio in frequenza del laser. La discussione delle caratteristiche del prototipo sviluppato da J.-P. Richard non è oggetto di questa tesi; può essere tuttavia utile darne una breve descrizione alfine di comprendere le differenze tra quel trasduttore ottico e quello da noi sviluppato.

Anche nel prototipo di J.-P. Richard il fascio luminoso prodotto dalla sorgente laser viene mandato su una cavità Fabry-Perot posta su un trasduttore risonante; il trasduttore è pensato in modo tale da essere bimodale e quindi da formare un rivelatore a 3 modi meccanici una volta connesso ad una barra risonante. Il laser viene stabilizzato in frequenza agganciandolo ad una cavità Fabry-Perot di riferimento stabile; il fascio così stabilizzato viene mandato sulla cavità posta sul trasduttore risonante e un fotodiodo raccoglie la potenza da questa trasmessa. Il segnale del fotodiodo viene usato da un circuito di retroazione che agisce sulla cavità posta sul trasduttore e la mantiene in risonanza con il laser; dallo stesso segnale si estrae anche l' informazione riguardante lo stato della barra al fine di rivelare l' arrivo di un impulso di onde gravitazionali.

La maggiore differenza tra questo trasduttore e quello da noi proposto consiste nel fatto che nel primo è necessario retroagire sul trasduttore, nel secondo no: poichè tale retroazione inevitabilmente comporta l' introduzione di un' altra sorgente di rumore sulla barra, ci pare che la soluzione da noi proposta potrebbe condurre a migliori risultati.

§ 3.5 - Calcolo di sensibilità di una barra equipaggiata con un trasduttore ottico

In questo paragrafo cercheremo di determinare la sensibilità, in termini della minima ampiezza h_{min} di impulso standard rivelabile, del rivelatore di onde gravitazionali costituito dalla barra AURIGA equipaggiata con il trasduttore ottico in sviluppo e raffreddata a temperature ultracriogeniche.

Torniamo per ora a considerare il sistema di Fig.2.3, in cui si pensa al primo oscillatore come rappresentante la barra di Weber e al secondo come rappresentante il trasduttore ottico. Una approssimazione migliore si ottiene considerando i due oscillatori come smorzati: siano rispettivamente β_x e β_y i coefficienti di dissipazione viscosa. Supponiamo che su tale sistema agiscano le forze di rumore e la forza f_g dovuta al passaggio di un impulso gravitazionale standard. Le forze di rumore che prendiamo in considerazione ai fini di questo calcolo sono le forze f_{T1} e f_{T2} di

Langevin [8] dovute all' agitazione termica dei due oscillatori e la forza f_{BA} che il sistema di trasduzione e lettura del segnale comporta inevitabilmente; tale ultimo termine è detto forza di retroazione o *back-action*. Scriviamo dunque il seguente sistema di equazioni del moto:

$$\begin{cases} m_b\ddot{X} + k_x x + k_y(x-y) + \beta_x\dot{X} + \beta_y(\dot{X}-\dot{y}) = f_g - f_{BA} + f_{T1} + f_{T2} \\ m_t\ddot{Y} - k_y(x-y) - \beta_y(\dot{X}-\dot{y}) = f_{BA} - f_{T2} \end{cases}$$

Se si trasforma questo sistema di equazioni secondo Fourier si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} (-m_b\omega^2 + b_1)X - b_2 Y = F_g - F_{BA} + F_{T_1} + F_{T_2} \\ (-m_t\omega^2 + b_2)Y - b_2 X = F_{BA} - F_{T_2} \end{cases}$$

ove al solito si è indicato il trasformato secondo Fourier con la lettera maiuscola e si è posto:

$$b_1(\omega) = k_x + k_y + i\omega(\beta_x + \beta_y)$$
$$b_2(\omega) = k_y + i\omega\beta_y$$

A questo punto per trovare h_{min} occorre risolvere il sistema, trovare l' espressione per Y-X e poi procedere in modo analogo a quanto fatto nel §2.1. Risulta:

$$Y(\omega) - X(\omega) = \frac{m_t\omega^2}{D(\omega)}(F_g + F_{T1}) + \frac{b_1 - b_2 - (m_b + m_t)\omega^2}{D(\omega)}(F_{BA} - F_{T2}) \qquad (3.23)$$

ove è:

$$D(\omega) = (-m_b\omega^2 + b_1)(-m_t\omega^2 + b_2) - b_2^{\,2}$$

Per quanto detto nel paragrafo precedente la densità spettrale del rumore in frequenza della luce in corrispondenza della sezione A di Fig.3.10 è data dalla sovrapposizione della densità spettrale del rumore in spostamento della cavità dovuto al moto termico e alla forza di back-action, convertita in frequenza, e della densità spettrale del rumore in frequenza del circuito di aggancio. In virtù della (3.4) e della (3.23) la densità spettrale del rumore in frequenza in corrispondenza della sezione A di Fig.3.10 risulta dunque essere (in Hz^2/Hz):

$$S_{freq.\,trasd.}(\omega) = \left(\left| \frac{m_t\omega^2}{D(\omega)} \right|^2 S_{T1} + \left| \frac{b_1 - b_2 - (m_b + m_t)\omega^2}{D(\omega)} \right|^2 (S_{T2} + S_{BA}) \right) \frac{\nu_L^{\,2}}{L_{ct}^{\,2}} + S_{WBtr} \qquad (3.24)$$

In questa espressione S_{T1}, S_{T2} rappresentano rispettivamente le densità spettrali in forza del rumore termico degli oscillatori barra e trasduttore, rispettivamente e sono espresse in N^2/Hz; S_{BA} rappresenta la densità spettrale della forza di back-action, espressa in N^2/Hz, e S_{WBtr} la densità spettrale del rumore in frequenza dato dall' aggancio del laser alla cavità-trasduttore (in assenza delle risonanze meccaniche), espressa in Hz^2/Hz.

Cerchiamo ora di dare una stima dei diversi contributi al rumore. Il teorema di Nyquist [8] afferma che:

$$S_{T1} = 2K_B T_{termo}\beta_x \; ; \quad S_{T2} = 2K_B T_{termo}\beta_y \tag{3.25}$$

ove T_{termo} è la temperatura termodinamica dei due oscillatori.

Per quanto riguarda la back-action, bisogna innanzitutto individuare le cause di tale rumore. Sicuramente un contributo è dato dal rumore nella pressione di radiazione sulla cavità-trasduttore: la pressione di radiazione esercita una forza su ciascuno degli specchi costituenti la cavità che tende perciò ad allungarsi. Poichè la massa del trasduttore è molto minore di quella della barra, il maggiore contributo in allungamento è dovuto alla forza che agisce sul secondo specchio, quello cioè attaccato alla parte del trasduttore in risonanza con la barra (cfr. Fig.3.1). Tale contributo di rumore viene detto di *back-action* nel senso che la forza agente sul secondo specchio della cavità-trasduttore sposta in ultima analisi la barra stessa e quindi il trasduttore ha un rumore che "torna indietro" sino alla barra. Trascuriamo dunque la forza che agisce sullo specchio di ingresso della cavità e consideriamo solo la forza che agisce sullo specchio attaccato alla parte risonante del trasduttore.

La forza che agisce sul secondo specchio della cavità-trasduttore per effetto della pressione di radiazione è legata al numero n_u di urti nell' unità di tempo dei fotoni all' interno della cavità contro di esso:

$$f_{BA} = \frac{2h\nu_L}{c} n_u = \frac{2P_{s2}}{c}$$

ove P_{s2} è la potenza della luce incidente sul secondo specchio della cavità. P_{s2} è legata alla potenza trasmessa dal Fabry-Perot tramite la trasmittività del secondo specchio della cavità.

A causa del fatto che per realizzare il circuito di aggancio alla Pound e Drever occorre, come detto, modulare la fase del campo elettrico incidente sulla cavità, la potenza da essa trasmessa risulta essere inferiore a quella che si avrebbe in assenza della modulazione. Per calcolare la potenza trasmessa dalla cavità-trasduttore sarebbe dunque necessario applicare la (3.10) al campo elettrico di (3.21), moltiplicare per la riflettività del beam-splitter e poi considerare il modulo quadro.

Più semplicemente la potenza trasmessa può essere stimata come segue: la potenza P_0 del fascio laser prodotto dalla sorgente si distribuisce, dopo la modulazione di fase necessaria per l' aggancio, tra la componente alla frequenza del laser e quelle alle bande laterali. La componente alla frequenza della portante risulta essere la frazione $J_0(\beta)^2$ della potenza P_0 del fascio prodotto dalla sorgente; tipicamente si sceglie β=1.08 sicchè $J_0(\beta)^2$=0.53. Il fascio laser poi incontra il beam-splitter1 e perciò si divide in due fasci di potenza P_1 e P_2 che vanno rispettivamente verso la cavità-trasduttore e verso la cavità-sensore. Prima però di incidere sulle cavità i due fasci laser incontrano i beam-splitter 2 e 3; se indichiamo rispettivamente con γ_{b1}, γ_{b2} e γ_{b3} la riflettività dei beam-splitter 1, 2 e 3, allora la potenza P_T del fascio laser incidente sulla cavità-trasduttore risulta essere:

$$P_T = \gamma_{b1}\gamma_{b2}P_0$$

Le bande laterali, come detto, vengono quasi completamente riflesse dal Fabry-Perot e dunque in base alla (3.10), in condizioni di risonanza, viene trasmessa dalla cavità-trasduttore solo la potenza P_t (considerando nullo il coefficiente α di assorbimento del mezzo e specchi con le stesse caratteristiche di riflettività e trasmissione):

$$P_t = \gamma_{b1}\gamma_{b2}P_0 J_0(\beta)^2 \frac{T_t^2 F_t^2}{\pi^2 R_t}$$

F_t è la finezza della cavità-trasduttore, T_t e R_t la trasmittività e riflettività degli specchi che la costituiscono. Si può dunque in buona approssimazione stimare che la potenza P_{s2} che incide sul secondo specchio della cavità quando essa è in risonanza è:

$$P_{s2} = \frac{P_t}{T_t} = \gamma_{b1}\gamma_{b2}P_0 J_0(\beta)^2 \frac{T_t F_t^2}{\pi^2 R_t} \qquad (3.26)$$

Supponiamo ora che la cavità sia, rispetto alle condizioni di risonanza, più lunga di una quantità Δx piccola; sia cioè lunga L_{ct}' con:

$$L_{ct}' = m\frac{2c}{\nu_L} + \Delta x \ , \qquad \text{ove m è intero e: } |\Delta x| << \frac{2c}{\nu_L}$$

Dalla (3.10) e da quanto appena visto si ottiene per P_{s2} la seguente espressione:

$$P_{s2} = \gamma_{b1}\gamma_{b2}P_0 J_0(\beta)^2 \frac{T_t F_t^2}{\pi^2 R_t}\left(1 - \frac{16F_t^2\nu_L^2}{c^2}\Delta x^2 + \ldots\right) \qquad (3.27)$$

La variazione della potenza della radiazione laser incidente sul secondo specchio della cavità dipende dunque, vicino alla risonanza, solo dalla seconda potenza dell' allungamento Δx rispetto alla risonanza: ciò è conseguenza del fatto che

in risonanza la potenza trasmessa assume un valore massimo. Si può dunque approssimare al primo ordine in Δx:

$$f_{BA} = \gamma_{b1}\gamma_{b2} P_0 J_0(\beta)^2 \frac{2 T_t F_t^{\,2}}{\pi^2 R_t c} \tag{3.28}$$

Per il calcolo di sensibilità siamo interessati non al valore in continua della forza f_{BA} di back-action ma alla sua fluttuazione media e cioè alla sua densità spettrale S_{BA}; per ottenerla facciamo l' ipotesi ragionevole che il contributo più significativo sia dovuto alle fluttuazioni in potenza del laser. Se S_{P0} rappresenta la densità spettrale del rumore in potenza del laser allora:

$$S_{BA} = \left(\gamma_{b1}\gamma_{b2} J_0(\beta)^2 \frac{2 T_t F_t^{\,2}}{\pi^2 R_t c} \right)^2 S_{P0} \tag{3.29}$$

Se il livello delle fluttuazioni in potenza del laser fosse quello poissoniano granulare (shot noise), legato alla natura corpuscolare dei fotoni, allora si scriverebbe:

$$S_{BA} = \left(\gamma_{b1}\gamma_{b2} J_0(\beta)^2 \frac{2 T_t F_t^{\,2}}{\pi^2 R_t c} \right)^2 h\nu_L P_0 \tag{3.30}$$

In realtà, in base alle misure sperimentali effettuate e riportate nel §6.2, si può estrapolare che il laser a nostra disposizione abbia un rumore in potenza (in W^2/Hz) maggiore di un fattore circa $5 \cdot 10^4 P_W$ (ove P_W è il valore numerico della potenza del laser espressa in Watt) rispetto a quello shot appena valutato, per potenze superiori a qualche decina di μW. Per tale ragione, nel calcolare la sensibilità di una barra ultracriogenica equipaggiata con il trasduttore ottico descritto, si è considerato come rumore in ampiezza del laser quello misurato sperimentalmente.

Per quanto riguarda il rumore bianco in frequenza dell' aggancio, si dimostra che, fissata la potenza della luce laser che incide sulla cavità-trasduttore, la lunghezza di quest' ultima, la finezza, esiste un valore inferiore limite per S_{WBtr}: esso è determinato dal rumore shot sulla componente in continua V_{dc} della tensione prodotta dal fotodiodo che raccoglie la luce riflessa dalla cavità. Se indichiamo con R_f la resistenza di carico del fotodiodo, allora la tensione di rumore shot ha una densità spettrale bianca (in V^2/Hz):

$$S_{Vshot} = 2 e R_f V_{dc}$$

dove e rappresenta la carica dell' elettrone. Dopo avere fatto passare questo rumore attraverso la catena elettronica prevista dall' aggancio, lo si può convertire in un

rumore in frequenza tramite la curva di discriminazione. Si ottiene così il limite inferiore all' efficienza dell' aggancio (in Hz^2/Hz) [10]:

$$S_{P.D.tr} = \frac{ec^2}{32\eta_f\gamma_{b1}\gamma_{b2}(1-\gamma_{b2})}\frac{1}{P_0}\frac{(T_t+\Sigma_t)}{T_t F_t^{\,2}}\frac{1}{L_{ct}^{\,2}}\frac{J_0(\beta)^2\left(\frac{\Sigma_t}{T_t+\Sigma_t}\right)^2 + 2J_1(\beta)^2}{J_0(\beta)^2 J_1(\beta)^2} \quad (3.31)$$

ove η_f la sensibilità del fotodiodo in A/W. Tipicamente si sceglie β=1.08 perchè in tal modo il prodotto $J_0(\beta)J_1(\beta)$ risulta essere massimo, e si semplifica la scrittura considerando $T=\Sigma$. Si osserva, dunque, che il limite alla densità spettrale del rumore in frequenza dell' aggancio (in Hz^2/Hz) è inversamente proporzionale alla seconda potenza della finezza, alla potenza incidente e alla seconda potenza della lunghezza della cavità.

Poichè sperimentalmente si riesce quasi a raggiungere tale limite [10], nel calcolo di sensibilità prendiamo questo come rumore a banda larga in frequenza della luce laser in corrispondenza della sezione A di Fig.3.10. Stimiamo dunque:

$$S_{WBtr} = S_{P.D.tr} \quad (3.32)$$

A questo punto si è stimato lo spettro di rumore in frequenza della luce laser alla sezione A di Fig.3.10: a tale spettro si sovrapporrà il segnale di origine gravitazionale. Per estrarre l' informazione sull' arrivo dell' impulso gravitazionale è necessario, come si è detto, confrontare la frequenza del laser in corrispondenza della sezione A di Fig.3.10 con la frequenza della cavità-sensore, di lunghezza L_{cs}, che deve essere la più stabile possibile. Tuttavia, per quanto si cerchi di stabilizzare la cavità-sensore in frequenza, essa presenterà necessariamente del rumore, il quale può solo peggiorare la sensibilità del rivelatore.

Come si è detto, si pensa di comandare la cavità-sensore tramite un attuatore piezoelettrico; cerchiamo ora di dare una stima del rumore così introdotto. È presente sia il rumore in frequenza, a larga banda, legato al segnale di errore prodotto dal circuito alla Pound e Drever, sia il rumore in spostamento meccanico della cavità convertito in frequenza mediante la:

$$S_{freq} = \left(\frac{\nu_L}{L_{cs}}\right)^2 S_{spostamento} \quad (3.33)$$

ove S_{freq} è espresso in Hz^2/Hz e $S_{spostamento}$ in m^2/Hz.

Per quanto riguarda il rumore in frequenza $S_{P.D.sens}$ del Pound e Drever possiamo ancora stimarlo essere pari al limite inferiore dato dal rumore shot sulla

corrente generata dal fotodiodo che raccoglie la luce riflessa dalla cavità-sensore. In base agli stessi ragionamenti esposti in precedenza si ricava che:

$$S_{P.D.sens.} = \frac{ec^2}{32\eta_f\gamma_{b1}\gamma_{b3}(1-\gamma_{b3})}\frac{1}{P_0}\frac{(T_s+\Sigma_s)}{T_s F_s^{\,2}}\frac{1}{L_{cs}^{\,2}}\frac{J_0(\beta)^2\left(\frac{\Sigma_s}{T_s+\Sigma_s}\right)^2 + 2J_1(\beta)^2}{J_0(\beta)^2 J_1(\beta)^2} \qquad (3.34)$$

Si suppone qui che la cavità-sensore sia costituita da specchi con la stessa finezza F_S, la stessa trasmittività T_S e lo stesso coefficiente di assorbimento Σ_S. Per quanto riguarda il rumore in spostamento, si può pensare di porre la cavità-sensore su un banco ottico, quale la stessa barra di Weber, tale che si possa considerare nullo il rumore sismico. Naturalmente la cavità-sensore non deve risentire della risonanza della barra: potrà essere posta, ad esempio, nei pressi della sezione baricentrale della barra stessa, ove lo spostamento alla risonanza rispetto all' equilibrio è nullo (cfr. Fig.1.5). Il rumore in spostamento è dunque determinato essenzialmente dal rumore termico dell' attuatore piezoelettrico e dal rumore del generatore che lo comanda. Poichè si farà in modo che la cavità-sensore non presenti risonanze meccaniche a frequenze vicine a 1KHz, possiamo considerare essere a larga banda anche il rumore in spostamento.

Consideriamo ora il rumore termico del piezoelettrico che agisce sulla cavità-sensore: poichè, come si è detto, si pensa di porre la cavità-sensore sulla barra stessa, il rumore termico va calcolato alla temperatura di 100mK della barra. La bontà della stima che possiamo fare del rumore termico è limitata dalla carenza delle informazioni a disposizione riguardanti i piezoelettrici alla temperatura di interesse. Bisogna comunque considerare sia il contributo dissipativo elettrico sia quello meccanico: in base alle informazioni fornite da una ditta produttrice ceramiche piezoelettriche (Morgan Matroc Limited), il contributo dissipativo meccanico dovrebbe essere inferiore a quello elettrico, o essere al più confrontabile con esso. Si può dunque in prima approssimazione considerare il rumore termico essere dovuto essenzialmente alla perdita elettrica e scrivere, in base al teorema di fluttuazione e dissipazione [8], che alla temperatura T_{termo} si ha un rumore in spostamento (in m^2/Hz) dato da:

$$S_{xpzt} \approx d_{pzt}^2 2K_B T_{termo}\,\mathrm{Re}\{Z\} \qquad (3.35)$$

ove d_{pzt} è la costante piezoelettrica (definita come il rapporto tra la elongazione meccanica relativa e il campo elettrico applicato e misurata in m/V) e Re{Z} è la parte reale dell' impedenza elettrica del piezoelettrico. Per molte ceramiche piezoelettriche la costante d_{pzt} alle temperature dell' elio liquido è circa 1/4 del valore a temperatura ambiente (circa $300\cdot10^{-12}$m/V): stimiamo dunque che a qualche Kelvin valga circa

$80 \cdot 10^{-12}$m/V. Una misura da noi effettuata a temperatura ambiente su una ceramica piezoelettrica ha indicato che, a frequenza di 1KHz, essa presenta un angolo di perdita δ_p (definito come l' arco la cui tangente è il rapporto tra l' impedenza immaginaria e l' impedenza reale) pari a $2 \cdot 10^{-3}$rad ed una capacità C di 16nF. A basse temperature l' angolo di perdita dovrebbe ridursi; se tuttavia lo consideriamo essere uguale a quello a temperatura ambiente, allora dalla formula precedente ricaviamo che la densità spettrale del rumore in spostamento alla temperatura di 0.1K è:

$$\sqrt{S_{xpzt}} \approx 4 \cdot 10^{-22} \left(\frac{\delta_p}{2 \cdot 10^{-3}} \frac{16\text{nF}}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{m}{\sqrt{\text{Hz}}} \tag{3.36}$$

Occorre ora stimare il rumore dovuto all' elettronica che comanda il piezoelettrico tramite il servomeccanismo: l' elettronica presenterà un certo livello di rumore in tensione che si converte in spostamento della cavità tramite la costante piezoelettrica d_{pzt} del piezoelettrico. È ragionevole pensare che usando dell' elettronica mirata il rumore possa essere piatto per le frequenze attorno a 1KHz ed avere un valore di qualche nV/$\sqrt{\text{Hz}}$ [11]. Tramite la costante piezoelettrica un simile rumore in tensione si converte in un rumore in spostamento $\sqrt{S_{xgen}}$ di circa $5 \cdot 10^{-19}$m/$\sqrt{\text{Hz}}$: se la cavità-sensore fosse lunga 20cm allora questo rumore non comprometterebbe la sensibilità del rivelatore. Il fatto di avere una cavità-sensore più lunga della cavità-trasduttore (lunga circa 1cm) presenta anche il vantaggio di ridurre il limite shot del rumore in frequenza dovuto al Pound e Drever del sensore rispetto a quello del trasduttore.

La densità spettrale del rumore in frequenza dato dalla cavità-sensore risulta quindi essere (in Hz^2/Hz):

$$S_{f.sens.}(\omega) = \left(S_{xpzt} + S_{xgen}\right) \left(\frac{\nu_L}{L_{cs}} \right)^2 + S_{P.D.sens.} \tag{3.37}$$

Una volta stimate tutte le sorgenti di rumore si può affermare che la densità spettrale totale di rumore in frequenza è:

$$S_{f.tot}(\omega) = S_{f.trasd.}(\omega) + S_{f.sens.}(\omega) \tag{3.38}$$

A questo punto per calcolare la sensibilità del rivelatore in termini della minima ampiezza h_{min} di impulso standard rivelabile basta calcolare il rapporto segnale-rumore e trovare l' ampiezza di impulso standard che rende unitario tale rapporto.

Il segnale $\hat{h}_x(\omega)$ in spostamento per h_0=1 in uscita dal sistema dei due oscillatori accoppiati si ottiene facilmente sostituendo nella (3.23), dopo avere annullato tutte le forze di rumore, l' espressione della forza gravitazionale (2.1)

relativa all' impulso standard di durata Δt e pulsazione centrale ω_S. Per questo occorre conoscere la trasformata di Fourier di (1.12) che è:

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h_0 \Delta t \left[e^{-\frac{(\omega-\omega_S)^2 \Delta t^2}{2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_S)^2 \Delta t^2}{2}} \right] \tag{3.39}$$

Si ricava:

$$\hat{h}_x(\omega) = -\sqrt{\frac{2}{\pi^3}} L_b \frac{m_b m_t}{D(\omega)} \omega^4 \Delta t \left[e^{-\frac{(\omega-\omega_S)^2 \Delta t^2}{2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_S)^2 \Delta t^2}{2}} \right] \tag{3.40}$$

In termini di frequenza il segnale si scrive allora:

$$\hat{h}_f(\omega) = \hat{h}_x(\omega) \frac{\nu_L}{L_{ct}} \tag{3.41}$$

In base a quanto scritto nel §2.1, la minima ampiezza di impulso standard rivelabile, a rapporto segnale-rumore unitario, è:

$$h_{min} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\hat{h}_f(\omega)\right|^2}{S_{f.tot}(\omega)} d\omega \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.42}$$

Per effettuare il calcolo è necessario infine sostituire le espressioni trovate più sopra e calcolare l' integrale di (3.42). Non essendo esso risolubile analiticamente è stato calcolato per via numerica.

Dalle formule precedenti è evidente che il risultato del calcolo dipende dai valori che si assegnano alla massa efficace m_t del trasduttore, alla potenza P_0 del laser, alle caratteristiche di riflettività e trasmittività degli specchi formanti le cavità Fabry-Perot ed ai parametri dei circuiti di aggancio (riflettività dei beam-splitter, sensibilità η_f dei fotodiodi): le caratteristiche della barra e del segnale gravitazionale (impulso standard) si considerano fissate.

I valori dei parametri che abbiamo utilizzato nel calcolo sono elencati nella tabella Tab.3.1. Essi sono il risultato di una ottimizzazione volta a determinare la situazione che genera il risultato migliore in termini di sensibilità e banda ottima del rivelatore. C' è tuttavia ancora spazio per un ulteriore e più fine studio di ottimizzazione, che ci si aspetta possa portare ad un qualche miglioramento del risultato qui presentato.

Il calcolo è stato ripetuto per diversi valori della massa efficace m_t del trasduttore: si è notato che, fissati tutti gli altri parametri del rivelatore, esiste un valore ottimale per la massa che fornisce la migliore sensibilità. Il minimo risulta

piuttosto largo in quanto il valore di h_{min} varia meno del 20% se la massa efficace del trasduttore cambia di un ordine di grandezza. Al contrario al variare della massa efficace cambia sensibilmente la banda ottima, che è massima per il valore ottimale di m_t. Con i parametri di Tab.3.1 il valore ottimale è m_t=1.2Kg. La sensibilità corrispondente risulta essere pari a circa $3 \cdot 10^{-20}$.

È interessante anche vedere l' andamento in funzione della frequenza dell' integrando di (3.42), che riportiamo in Fig.3.12 per il valore ottimale della massa efficace del trasduttore. Da tale figura si ricava che la banda di frequenza utile del rivelatore è di circa 50Hz. Grafichiamo inoltre nella Fig.3.13 l' andamento della densità spettrale $S_{f.tot}$ del rumore totale in frequenza: nella figura sono evidenti i due picchi corrispondenti ai due modi di oscillazione del sistema.

TAB. 3.1

QUANTITA`	VALORE
Massa barra	2300 Kg
Freq. risonanza barra	1KHz
Tempo decad. barra	1600 sec
Lunghezza barra	3 m
Freq. risonanza trasd.	1KHz
Tempo decadim. trasd.	1600 sec
Durata impulso Δt	$2.5 \cdot 10^{-4}$ sec
Freq. centrale impul. $\omega_s/2\pi$	1KHz
Temperatura termod.	100 mK
Lungh. cavità-trasd.	1 cm
Finezza cavità-trasd.	$3 \cdot 10^5$
Lungh. cavità-sens.	20 cm
Finezza cavità-sens.	$3 \cdot 10^5$
Riflettività beam-splitter 1, 2 e 3	0.5
Sensibilità fotodiodi	0.6 A/W
Frequenza luce laser ν_L	$2.8 \cdot 10^{14}$ Hz
Potenza fascio laser	10 mW
Rumore in pot. shot	$4.3 \cdot 10^{-11}$ W/$\sqrt{\text{Hz}}$
Rumore in pot. sperim.	10^{-9} W/$\sqrt{\text{Hz}}$
Rum. freq. da P. e D. trasdu. $\sqrt{S_{WBtr}}$	$8 \cdot 10^{-4}$ Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$
Rum. freq. da termico trasdu. (ai modi)	136 Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$
Rum. freq. da termico barra (ai modi)	140 Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$
Rum. freq. da back-action (ai modi)	126 Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$
Rum. freq. da P. e D. sens. $\sqrt{S_{P.D.sens}}$	$4 \cdot 10^{-5}$ Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$
Rum. freq. tot. da cav. sens. $\sqrt{S_{freq.sens}}$	$7 \cdot 10^{-4}$ Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$

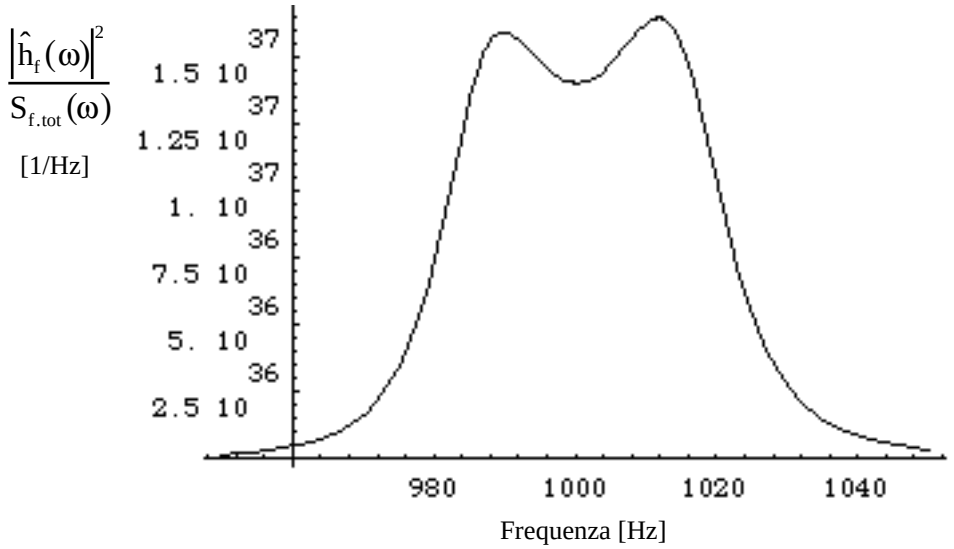

Fig. 3.12 Andamento in funzione della frequenza della densità spettrale del rapporto segnale-rumore, calcolato all' uscita del rivelatore

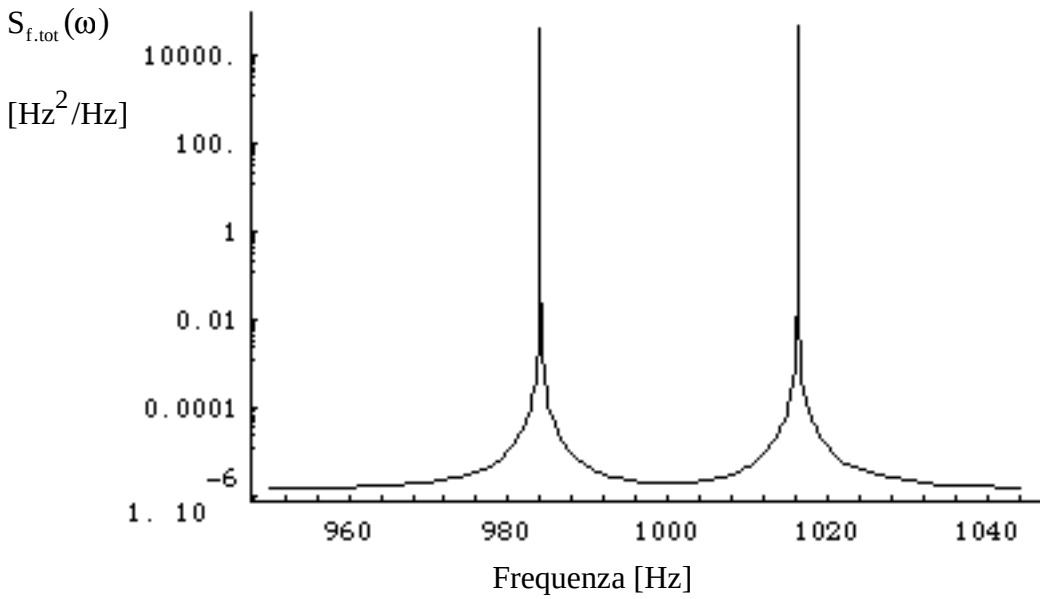

Fig. 4.13 Andamento in funzione della frequenza della densità spettrale del rumore totale, all' uscita del rivelatore

L' andamento della densità spettrale del rumore totale in frequenza in uscita dal rivelatore è simile a quello che in Fig.3.11 si era previsto di avere in corrispondenza della sezione A di Fig.3.10. I due infatti differiscono solo per il contributo di rumore della cavità sensore, che come visto influisce solo sul livello del fondo piatto da cui spuntano i picchi corrispondenti ai due modi.

Come si è detto nel §2.1, per valutare la sensibilità di un rivelatore a barra risonante si usa spesso la temperatura effettiva T_{eff} definita come la minima fluttuazione di energia E_{eff} rivelabile divisa per la costante di Boltzman:

$$T_{eff} = \frac{1}{K_B} E_{eff} = \frac{2}{K_B} \int_{-\infty}^{+\infty} f_g(t)\dot{X}(t)dt = -\frac{2}{\pi K_B} \int_0^{+\infty} \omega F_g(\omega)\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}d\omega \qquad (3.43)$$

In questa espressione si sono sfruttate le proprietà della trasformata di Fourier; il fattore 2 a moltiplicare deriva dal fatto che nell' analisi finora svolta si è implicitamente assunto che il segnale gravitazionale arrivi al tempo t=0. In generale però il tempo di arrivo non è noto sicchè l' impulso standard può essere scomposto in due contributi sfasati tra loro di $\pi/2$. Per tener conto anche di questo allora è necessario introdurre il fattore 2 moltiplicativo di (3.43). Il calcolo è stato eseguito solo per il valore ottimale di massa efficace del trasduttore e cioè per m_t=1.2Kg. Riportiamo di seguito i valori di h_{min}, T_{eff} ed il numero $N = \frac{K_B T_{eff.}}{\hbar\omega_0}$ di $\hbar$ corrispondenti alla minima energia rivelabile, per il valore ottimale di massa efficace del trasduttore.

massa efficace trasduttore ottimale =1.2 Kg
$h_{min} = 3\ 10^{-20}$
$T_{eff} = 3\ \mu K$
N = 70

(3.44)

Il calcolo di sensibilità qui presentato dà una stima della migliore sensibilità che ci si aspetta possa raggiungere il trasduttore ottico proposto; il risultato è molto incoraggiante e confrontabile con quello ottenibile con un trasduttore capacitivo se questo potesse venire amplificato da un dc-SQUID a $100\hbar$ [12].

Va tuttavia osservato che per raggiungere la sensibilità qui calcolata si dovranno sperimentalmente affrontare e risolvere diversi problemi, di cui qui non si è tenuto conto. In particolare andranno studiati i problemi che possono sorgere dall' utilizzo di fibre ottiche e da eventuali disturbi dovuti al puntamento del laser e alla pulizia del modo di risonanza ottica del laser stesso. Va infine detto che nel calcolo si è trascurato il rumore in potenza del fascio laser generato dai beam-splitter: in base al riferimento [13], ci si aspetta comunque che tale contributo sia trascurabile. L' effetto principale di tutti questi rumori è quello di aumentare la forza di back-action: per tale ragione la definitiva ottimizzazione dei parametri del rivelatore dovrebbe essere fatta successivamente alla misura sperimentale del rumore in potenza del laser che tenga conto di tutte le cause di disturbo.

§ 3.6 - Bibliografia

[1] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, New York (1965)
[2] O. Svelto, *Principi dei laser*, Tamburini Editore (1972) Milano
[3] R. V. Pound, Rev. Sci. Instrum **17** (1946) 460
[4] R. W. P. Drever et al., Appl. Phys. B **31** (1983) 97
[5] G. Pizzella, *Fisica sperimentale del campo gravitazionale*, La Nuova Italia Scientifica (1993) Roma
[6] G. Cantatore et al., Rev. Sci. Instrum. **66** (1995) 2786
[7] D. I. Robertson et al., Rev. Sci. Instrum. **66** (1995) 4447
[8] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic processes*, McGraw-Hill, Singapore (1984)
[9] J. -P. Richard, Phys. Rev. D **46** (1992) 2309
[10] G. Ruoso, *Realizzazione di una cavità risonante ottica ad alta finezza per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto con tecniche ellissometriche*, tesi di dottorato di ricerca in Fisica, Univ. di Padova, A. A. 1993-94
[11] G. Fontana, comunicazione privata
[12] J. -P. Zendri, *Realizzazione della catena di rivelazione per l' antenna gravitazionale AURIGA: trasduttore elttromeccanico, amplificatore a SQUID, ottimizzazione*, tesi di dottorato di ricerca in Fisica, Univ. di Padova , A. A. 1991-92
[13] C. M. Caves, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 75

Capitolo 4

Progetto meccanico del trasduttore ottico

§ 4.1 - Modello elastico del trasduttore

Si è visto nel §3.5 che, affinchè il trasduttore ottico sia ottimizzato ai fini della sensibilità alla temperatura di 100mK, è necessario che la sua massa efficace sia prossima a 1.2Kg. Si vuole inoltre che la frequenza di risonanza meccanica del trasduttore sia prossima a quella della barra alla quale si vuole accoppiare il trasduttore.

La geometria che si è scelta per la parte risonante del trasduttore è schematizzata in Fig.4.1: si tratta di un piatto circolare in asse con la barra, di spessore s, raggio r_e ed estremi fissi, che è caricato da una massa concentrica distribuita in modo uniforme all' interno di una circonferenza di raggio $r_i<r_e$. Chiamiamo questa geometria *a tamburo*, e chiamiamo *tamburo* la parte risonante del trasduttore.

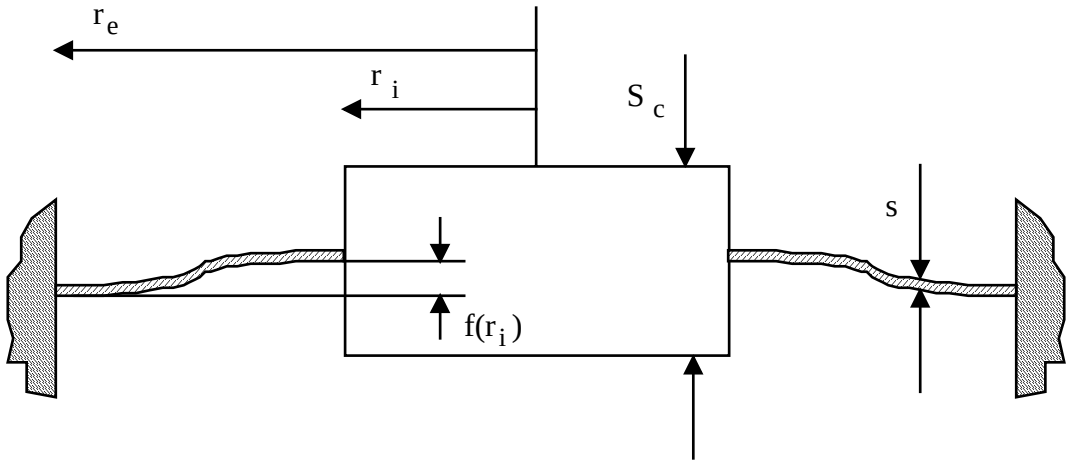

Fig. 4.1 Sezione del piatto con carico centrale che schematizza la parte risonante del trasduttore nel moto vibrazionale in considerazione

Questo sistema viene posto in risonanza con il primo modo longitudinale della barra risonante; più in particolare, si accoppia alla barra il modo di vibrazione del piatto che presenta simmetria cilindrica ed è privo di diametri nodali. In tale situazione si approssima il carico centrale ad una massa rigida, non avente cioè risonanze proprie vicine a quella del primo modo longitudinale della barra, e se ne realizza lo spostamento massimo rispetto all' equilibrio; in questo moto la massa centrale oscilla mantenendosi parallela a sè stessa. A questo punto basta porre sul peso centrale, coassialmente, il secondo specchio della cavità-trasduttore per poter realizzare il trasduttore ottico di cui al capitolo 3. La stessa geometria del piatto con carico centrale è stata recentemente proposta per una realizzazione bimodale del trasduttore capacitivo [1].

Vediamo ora come sia possibile, fissata la geometria del trasduttore, determinarne la frequenza di risonanza meccanica in base alle dimensioni e caratteristiche del materiale. Per quanto riguarda la massa efficace, che descrive il trasduttore come un oscillatore accoppiato alla barra, essa sarà prossima alla somma della massa inerziale della lamina e del carico, analogamente a quanto accade per il trasduttore risonante a fungo [2].

Per lo studio della risonanza del sistema di Fig.4.1 conviene approssimare la lamina come sottile e sfruttare i risultati validi per tale caso. In particolare si può dimostrare [3] che, per una lamina sottile libera di vibrare nel piano normale alla sua superficie, lo spostamento f rispetto alla posizione di equilibrio deve soddisfare alla equazione nelle coordinate polari (r,θ):

$$\left\{\frac{Ys^2}{12\left(1-\sigma^2\right)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]^2-\rho\omega^2\right\}f(r,\theta)=0 \qquad (4.1)$$

ove Y, σ sono rispettivamente il modulo di Young e il modulo di Poisson del materiale di cui è fatta la lamina e ω è la pulsazione della vibrazione.

La soluzione generale dell' equazione (4.1) si può scrivere come combinazione lineare di funzioni d' onda modali [2]:

$$f(r,\theta)=\sum_{n,l}\left[\alpha_{n,l}J_n\left(k_{n,l}r\right)+\beta_{n,l}Y_n\left(k_{n,l}r\right)+\gamma_{n,l}I_n\left(k_{n,l}r\right)+\delta_{n,l}K_n\left(k_{n,l}r\right)\right]\sin\left(n\theta+\theta_0\right) \qquad (4.2)$$

ove i pedici n, l assumono valori interi ≥0; J_n, Y_n e I_n, K_n sono funzioni di Bessel e funzioni di Bessel modificate di ordine n e $\alpha_{n,l}$, $\beta_{n,l}$, $\gamma_{n,l}$, $\delta_{n,l}$ sono dei coefficienti numerici. Il valore di $k_{n,l}$, detto numero d' onda e avente le dimensioni dell' inverso di una lunghezza, è legato alla frequenza di oscillazione del modo dalla relazione [3]:

$$\omega_{n,l}=\sqrt{\frac{Y}{12\rho\left(1-\sigma^2\right)}}sk_{n,l}^2 \qquad (4.3)$$

Il termine in θ che appare in (4.2) mostra che, per n>0, le funzioni d' onda modali presentano n diametri nodali. Fissato n, invece, si possono trovare diversi valori per il numero d' onda $k_{n,l}$, in corrispondenza dei modi con l circonferenze nodali. Poichè, come detto, siamo interessati al primo modo della lamina che sia a simmetria cilindrica, limitiamo la trattazione al modo con n=0 e l=0. Scriviamo dunque:

$$f(r,\theta)=\left[\alpha J_0(kr)+\beta Y_0(kr)+\gamma I_0(kr)+\delta K_0(kr)\right]\sin\left(\theta_0\right)$$

La f(r,θ) deve soddisfare a quattro condizioni al contorno, due per ciascun bordo della lamina:

i) **$r=r_e$**: il bordo esterno deve essere fisso e ad esso la superficie di curvatura della lamina deve arrivare perpendicolarmente (la derivata rispetto ad r dello spostamento della membrana deve annullarsi per $r=r_e$). In formule:

$$f(r,\theta)\Big|_{r=r_e} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r}\Big|_{r=r_e} = 0$$

ii) **$r=r_i$**: il bordo interno, a cui è attaccato il carico, deve essere soggetto a un determinato sforzo di taglio e ad esso la superficie di curvatura della lamina deve arrivare perpendicolarmente (la derivata rispetto ad r dello spostamento della membrana deve annullarsi per $r=r_i$). In formule:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r}\right)\right)\Big|_{r=r_i} = \frac{Z}{W} \; ; \qquad \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r}\Big|_{r=r_i} = 0$$

ove il coefficiente W è la rigidità della lamina e Z è lo sforzo di taglio per unità di lunghezza (per $r=r_i$) [3], [4]. Risulta nel nostro caso:

$$W = \frac{Ys^3}{12\left(1-\sigma^2\right)} \; ; \qquad Z = \frac{m_c f(r_i,\theta)\omega^2}{2\pi r_i}$$

Imporre queste 4 condizioni equivale a scrivere il seguente sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite α, β, γ, δ e parametrizzato da k.

$$\begin{pmatrix} J_0(kr_e) & Y_0(kr_e) & I_0(kr_e) & K_0(kr_e) \\ \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_e} & \frac{\partial Y_0(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_e} & \frac{\partial I_0(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_e} & \frac{\partial K_0(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_e} \\ \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_i} & \frac{\partial Y_0(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_i} & \frac{\partial I_0(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_i} & \frac{\partial K_0(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_i} \\ T_J(kr_i) & T_Y(kr_i) & T_I(kr_i) & T_K(kr_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

ove:

$$T_J(kr_i) = \frac{k^4 r_i S_c}{2h} J_0(kr_i) + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} - \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 J_0(kr)}{\partial r^2}\bigg|_{r=r_i} - \frac{\partial^3 J_0(kr)}{\partial r^3}\bigg|_{r=r_i}$$

;

espressioni analoghe valgono per T_Y, T_I e T_K.

Ai fini della determinazione delle dimensioni ottimali del tamburo è sufficiente conoscere il valore di f(r, θ) a meno di una costante moltiplicativa: pertanto possiamo normalizzare ad 1 una delle variabili α, β, γ, δ. Scegliamo ad esempio α=1. A questo punto il sistema (4.4) è a tre incognite ed un parametro; affinchè esso sia risolvibile si deve imporre che sia nullo il determinate della matrice che lo descrive. Tale ultima condizione fissa univocamente il parametro k e porta a 3 il numero delle equazioni indipendenti.

§ 4.2 - Progetto della parte risonante del trasduttore ottico

Dopo avere sviluppato un metodo per determinare la massa efficace del tamburo e la sua frequenza di risonanza, occorre trovare le dimensioni geometriche del trasduttore che soddisfino i due seguenti requisiti:

1) la frequenza di risonanza deve essere la più vicina possibile alla frequenza del primo modo longitudinale della barra. In base a misure sperimentali effettuate sulla barra a temperatura ambiente, del tutto uguale alla barra di AURIGA, disponibile nell' ambito dell' esperimento AURIGA per prove di diverso tipo, si è determinato che il primo modo longitudinale della barra è a circa 875Hz (cfr. §5.2);

2) la massa efficace (che qui consideriamo pari alla somma della massa inerziale della lamina e del carico centrale) deve essere circa 1.2Kg, in base ai calcoli di §3.5.

Va inoltre ricordato che il trasduttore è pensato per essere montato su una delle estremità (dette nel seguito facce) della barra del rivelatore AURIGA: essa presenta sulle sue due facce una serie di fori filettati disposti a raggera. Le dimensioni del trasduttore, dunque, vanno pensate in modo da poter sfruttare alcuni di tali fori per l' ancoraggio alla barra. In particolare poichè i fori più esterni sulla barra hanno interasse 250mm, conviene scegliere il raggio esterno della membrana essere inferiore a 100mm, in modo da evitare complicazioni nella progettazione e realizzazione meccanica del trasduttore.

In base a quanto esposto nel §2.3, il trasduttore deve possedere fattore di merito meccanico Q il più elevato possibile e comunque almeno pari a quello della barra a

cui è ancorato. Se ciò non fosse, il fattore di merito meccanico del rivelatore peggiorerebbe e ne sarebbe compromessa la sensibilità, come è evidente da (1.19): la necessità di soddisfare questa richiesta pone dei vincoli a volte anche molto stringenti nella progettazione del trasduttore. Ad esempio la richiesta di alto Q praticamente impone di utilizzare come materiale per il trasduttore lo stesso Al5056 di cui è fatta la barra: tale lega di alluminio è, purtroppo, difficilmente reperibile ma presenta il vantaggio di avere un fattore di merito meccanico intrinseco di circa 10^7, quando raffreddato a temperature di qualche Kelvin o inferiori [5], [6].

In letteratura, inoltre, è stato evidenziato un effetto anaelastico, detto "effetto termoelastico" [3], che nel caso di sottili corpi vibranti può determinare un peggioramento del fattore di merito meccanico rispetto al valore Q intrinseco del materiale; tale effetto, inoltre, determina una relazione di proporzionalità tra il fattore di merito meccanico e l' inverso dello spessore del corpo vibrante [7]. Per tale ragione si è deciso di fissare s=4mm, valore che dovrebbe permettere di ovviare l' effetto appena descritto, in base a quanto si evince dai riferimenti [1] e [7].

Una volta scelto il materiale costituente il trasduttore ed il valore di s, abbiamo cercato i valori di r_i, r_e ed S_c che davano il risultato voluto. La ricerca si è svolta per tentativi attraverso un processo di progressivo avvicinamento all' obiettivo.

In realtà, in base alla necessità su esposta di mantenere s non troppo piccolo e al fatto che la trattazione elastica del trasduttore esposta nel paragrafo precedente è valida, al contrario, nella approssimazione di lamina sottile, ci si aspetta che il calcolo eseguito sulla base del modello da noi sviluppato dia risultati corretti solo entro il 10%-20%: tale è infatti l' affidabilità di analoghi calcoli sviluppati per il trasduttore risonante a fungo [8]. Una volta realizzato il tamburo, si prevede di doverne modificare leggermente le dimensioni in modo da avvicinarne la frequenza di risonanza alla frequenza del primo modo longitudinale della barra.

Trovate le dimensioni ottimali in base al calcolo teorico, il tamburo conseguentemente progettato è stato realizzato nell' officina meccanica dei Laboratori Nazionali di Legnaro dell' Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

È stata poi misurata sperimentalmente la frequenza di risonanza e successivamente ridotto lo spessore s della lamina fino a $s=(2.7\pm 0.3)$mm, in modo da avvicinare la frequenza di risonanza del trasduttore a quella della barra. Dopo tale correzione, le dimensioni del tamburo, con l' errore sperimentale di misura, risultano pari a quelle elencate nella tabella Tab.4.1. Nella stessa tabella elenchiamo anche il valore della somma della massa della lamina e del carico calcolata in base alle dimensioni sperimentali e alla densità del materiale (che si assume pari a $2.65 gr/cm^3$ e priva di errore); riportiamo infine il valore della frequenza di risonanza del tamburo fornito dal calcolo numerico sulla base del modello teorico, eseguito inserendo come dimensioni quelle di Tab.4.1 ma prive di errore.

Tab. 4.1 Dimesioni del tamburo

PARAMETRO	VALORE
raggio esterno lamina r_e	(90.1 ± 0.2) mm
raggio interno lamina r_i	(60.00 ± 0.05) mm
spessore lamina s	(2.7 ± 0.3) mm
altezza carico centrale S_c	(38.2 ± 0.4) mm
massa lamina +carico	(1.25 ± 0.03) Kg
freq. ris. tamburo teorica	769 Hz

In Fig.4.2 mostriamo lo spostamento massimo della lamina rispetto all' equilibrio. La curva è stata calcolata con l' applicazione Mathematica su Macintosh sulla base del modello sviluppato nel paragrafo §4.1. È evidente come le condizioni al contorno che abbiamo poste risultano soddisfatte.

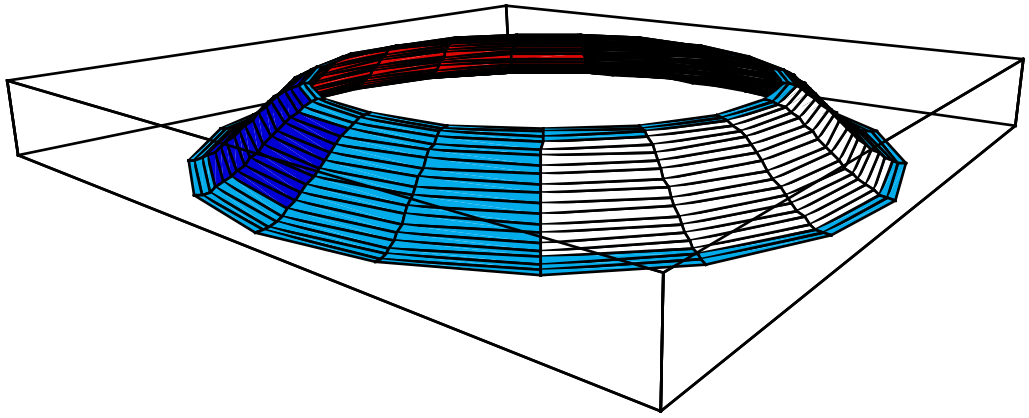

Fig. 4.2 La superficie di curvatura della lamina, in unità arbitrarie

Il tamburo è stato scavato da un blocco unico di Al5056, sulla base del progetto riportato nella figure Fig.4.3. La Fig.4.3 B) rappresenta una sezione del tamburo: in essa è evidente il carico centrale, la lamina e l' anello esterno che permette di fissare il pezzo alla barra. Al centro del carico, in asse con la barra, è stato praticato un incavo a sezione circolare per l' alloggio del secondo specchio della cavità-trasduttore. Sul carico centrale sono stati praticati altresì quattro fori filettati M3 che potranno servire per fissare degli accelerometri nel caso si voglia indagare il moto del tamburo. Si prevede di incollare lo specchio al tamburo, almeno in fase iniziale: se tale sistema dovesse rivelarsi inefficace o dannoso ai fini del fattore di merito meccanico del trasduttore si dovrà studiare un' alternativa a tale metodo. È opportuno qui osservare

che la luce laser dissipata sugli specchi della cavità-trasduttore o da essa trasmessa finisce per scaldare il trasduttore, cosa che potrebbe creare delle difficoltà se il trasduttore venisse montato sulla barra AURIGA e raffreddato: la potenza della luce trasmessa e dissipata, comunque, stimata essere circa 300μW non dovrebbe risultare problematica per un apparato refrigeratore come quello del criostato AURIGA che possiede un potere refrigerante pari a 1.25mW a 100mK [9]. È ancora da studiare, invece, quanto influisca sulla sensibilità il fatto che sul rivelatore sia presente un gradiente di temperatura, dovuto alla potenza laser dissipata e trasmessa che finisce per scaldare il trasduttore.

.

In Fig.4.3 A), invece, riportiamo una visione dal basso del tamburo, dalla parte cioè che va a contatto con la barra: sono evidenti quattro fori per viti M16 con le quali si realizza l' ancoraggio alla barra. Il contatto con essa viene realizzato solo da quattro piedini, in corrispondenza dei quattro fori per le viti M16: l' esperienza decennale sui trasduttori del gruppo romano e anche quella maturata nell' ambito dell' esperimento AURIGA consiglia infatti di minimizzare la superficie di contatto tra trasduttore e barra per non degradare il fattore di merito meccanico. Per lo stesso motivo si deve inoltre cercare di evitare che, quando la barra ed il trasduttore vengono posti in vuoto, dell' aria rimanga intrappolata al fondo dei fori filettati nei quali si avvitano le viti: per questa ragione si pratica un foro passante longitudinale sulle viti stesse o, quando ciò non sia possibile, si cerca comunque di permettere all' aria di fuoriuscire. Questa è la ragione per la presenza di quattro fori ø3mm sulla base inferiore del tamburo: essi sono vie di sfogo per altrettanti fori filettati M10 praticati sulla superficie superiore del tamburo (cfr. Fig. 4.3 C)).

In Fig.4.3 C) riportiamo infine la visione dall' alto del tamburo: sul carico centrale sono evidenti l’ incavo circolare per l' alloggio dello specchio e i quattro fori filettati M3 di cui più sopra. Sull' anello esterno del tamburo sono praticate quattro asole per l' inserimento delle viti M16 che ancorano il trasduttore alla barra. Sono altresì praticati quattro fori filettati M10 per fissare al tamburo i supporti dello specchio di ingresso della cavità-trasduttore e della fibra ottica che porta il fascio del laser. Questi fori sono posti su due assi ortogonali tra loro e ruotati di 45° rispetto alle asole per le viti M16: questo accorgimento è motivato dalla volontà di alleggerire il meno possibile l' anello esterno visto dalla lamina. Si desidera, infatti, avvicinarsi il più possibile alla condizione di Fig.4.1 in cui la lamina è ancorata ad una parete infinita. Questo è anche il motivo per cui si è cercato di avere un anello esterno il più massiccio possibile, compatibilmente con le ovvie esigenze pratiche sulle dimensioni e sulla massa totale dell' oggetto che va attaccato alla barra.

La massa dell’ oggetto rappresentato in Fig.4.3 è pari a (5680 ± 1)gr.

§ 4.3 - Progetto della parte non risonante del trasduttore ottico

Ci occupiamo in questo paragrafo della progettazione dei supporti per la fibra ottica, lo specchio di ingresso alla cavità e la componentistica ottica necessaria per adattare alla cavità il fascio uscente dalla fibra. Si prevede di poter realizzare tale accoppiamento mediante una singola lente: per l' esigenza più volte sottolineata di non

degradare il fattore di merito meccanico, infatti, è importante cercare di ridurre al minimo il numero di oggetti che vanno incorporati al trasduttore.

Le caratteristiche che i supporti devono presentare dipendono dal modo in cui si intende allineare la cavità-trasduttore; come si è detto nel paragrafo precedente, si pensa di incollare sul tamburo il secondo specchio della cavità. Di conseguenza il resto dell' ottica, e cioè la fibra, la lente di accoppiamento e il primo specchio della cavità devono essere allineati rispetto allo specchio incollato. Indichiamo con estremità1 l' estremità della fibra che riceve la luce direttamente dal beam-splitter2 (cfr. Fig.3.10) e con estremità2 l' altra. L' allineamento della cavità procede per passi: si pone l' estremità1 della fibra di fronte al beam-splitter2 e ne si ottimizza la posizione in modo da massimizzare la luce trasmessa dalla fibra. Una volta incollato lo specchio sul tamburo, si devono posizionare l' estremità2 della fibra e la lente di accoppiamento in modo tale che la luce riflessa dallo specchio torni sulla fibra stessa e da massimizzare la luce trasmessa verso l' estremità1. Così procedendo si riesce ad allineare correttamente la fibra rispetto allo specchio. A questo punto si deve inserire il primo specchio della cavità-trasduttore tra la fibra e il tamburo; esso va posizionato in modo tale che la luce riflessa dallo specchio di ingresso della cavità torni sulla estremità2 della fibra e la luce trasmessa verso l' estremità1 sia massimizzata.

Notiamo qui che l' asse ottico della cavità è determinato dallo specchio incollato al tamburo, che non può essere mosso. Definiamo come asse $\hat{z}$ tale asse ottico; per realizzare l' allineamento si rende necessario poter traslare l' estremità della fibra nel piano perpendicolare all' asse ottico lungo gli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (cfr. Fig.4.4); la stessa fibra deve inoltre poter ruotare sia nel piano individuato dagli assi $\hat{x}$ e $\hat{z}$ sia in quello individuato dagli assi $\hat{y}$ e $\hat{z}$. È inoltre necessario garantire la possibilità di ruotare lo specchio di ingresso alla cavità-trasduttore nei due piani individuati dagli assi $\hat{x}$ e $\hat{z}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$. La necessità di tutti questi movimenti è data dal fatto che l' allineamento delle componenti ottiche è cruciale e che per questo non ci si può fidare della precisione garantita dalla lavorazione meccanica dei pezzi.

Si sottolinea qui che, in generale, nella progettazione di un trasduttore risonante si deve non solo evitare di introdurre fattori di dissipazione meccanica, come si è detto in precedenza, ma anche pezzi che abbiano frequenze di risonanza prossime o inferiori a quella del modo longitudinale fondamentale della barra. Questa è un' altra stringente limitazione alla quale bisogna sottostare. In base a tutto ciò è evidente che il progetto di un trasduttore completo è il risultato di una serie di scelte, molte delle quali possono a prima vista riguardare particolari poco rilevanti (quali ad esempio la scelta del passo di una vite e della sua lunghezza) ma sono invece molto spesso il frutto di attente considerazioni. È infatti estremamente facile introdurre elementi dissipativi o che abbiano fastidiose risonanze e quindi compromettere le prestazioni del trasduttore.

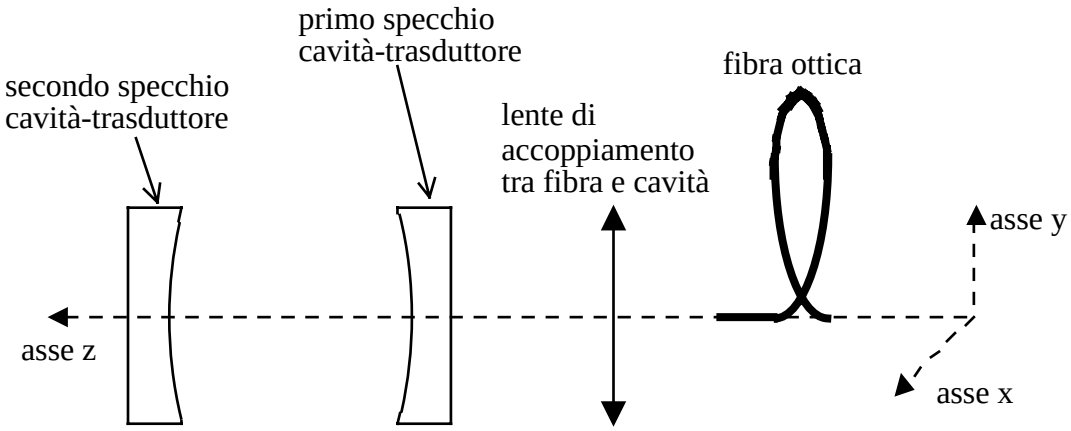

Fig. 4.4 Schema della cavità-trasduttore

Per realizzare i movimenti necessari e nel contempo soddisfare le richieste sul fattore di merito meccanico e sulle frequenze di risonanza abbiamo pensato a numerose geometrie, le quali tuttavia presentano differenti ma notevoli problemi. Alla fine abbiamo seguito un' idea che ci sembra conciliare bene le esigenze imposte, da una parte, dal fatto che il trasduttore va montato su una barra per la rivelazione delle onde gravitazionali e dall' altra dalla praticità e comodità d' uso.

Si decide di realizzare due distinti pezzi meccanici, uno per supportare il primo specchio della cavità-trasduttore e l' altro per la fibra e la lente di adattamento tra questa e la cavità. I due pezzi andranno poi montati uno sull' altro ed infine fissati al tamburo tramite le quattro viti M10 previste su di esso (cfr. §4.2).

Per quanto riguarda i movimenti angolari si utilizza un sistema come in Fig.4.5. Una flangia che si vuole fare ruotare è solidale con una lamina ad essa ortogonale: mediante una vite è possibile abbassare una estremità della flangia, piegando la lamina e ruotare quindi la flangia stessa.

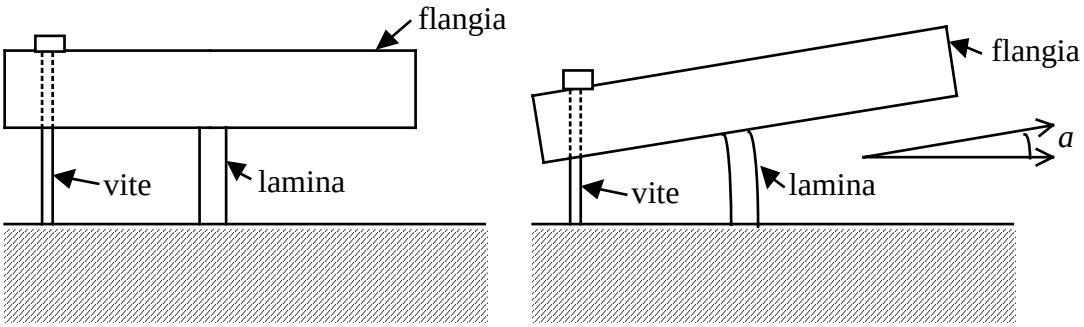

Fig. 4.5 Schema di come viene realizzato il movimento angolare per mezzo di una vite che premendo su una flangia piega una lamina: a sinistra il sistema è a riposo, a destra si realizza un angolo a

Per ruotare uno stesso oggetto su due piani ortogonali è sufficiente avere un sistema a torre costituito da una lamina, una flangia, una seconda lamina ed una seconda flangia, con le due lamine ortogonali tra loro.

Con un sistema di questo tipo si decide di realizzare il movimento angolare sia del primo specchio della cavità che della fibra; a quest' ultima si renderà solidale la lente di adattamento del fascio.

Il materiale scelto per la realizzazione è la lega dell' Alluminio denominata Ergal. Questa scelta è dovuta al fatto che tale lega presenta un carico di rottura [10] maggiore di quello di altre leghe di alluminio: a parità di dimensioni della lamina, dunque, tale materiale dovrebbe permettere di realizzare angoli maggiori.

Il disegno tecnico dei movimenti della fibra ottica e del primo specchio della cavità sono esposti rispettivamente nelle Fig.4.6 e Fig.4.7. Ciascuna flangia viene mossa da una coppia di viti che la bloccano in una posizione, riducendo così le dissipazioni meccaniche. In fase di progettazione ci siamo posti il problema che possono costituire tante viti ai fini del fattore di merito meccanico: l' esperienza acquisita sui trasduttori suggerisce di usare meno viti possibili, e comunque realizzate in alluminio, per non degradare il Q. Questa è comunque la geometria che ci sembra minimizzare il numero di viti necessarie ed in genere i contributi di dissipazione meccanica.

Chiamiamo "*basculatore della fibra*" l' oggetto che abbiamo progettato e che realizza il movimento per la fibra, "*basculatore dello specchio*" l' oggetto che abbiamo progettato e che realizza il movimento per lo specchio di ingresso della cavità.

Nelle figure Fig.4.8, Fig.4.9, Fig.4.10, Fig.4.11 e Fig.4.12 mostriamo le foto del tamburo e dei basculatori di fibra e specchio realizzati nell' officina meccanica dei Laboratori Nazionali di Legnaro dell' I.N.F.N. su nostro progetto. Ciascuno dei basculatori è stato scavato da un unico pezzo di Ergal; la lavorazione è stata fatta utilizzando, tra le altre, anche la macchina per l' elettro-erosione.

I basculatori realizzati sono in grado di garantire aggiustamenti angolari di qualche grado. Affinchè tuttavia si possano montare su di essi lo specchio e la fibra, con la lente di adattamento del fascio, è necessario ancora costruire delle flangette su cui fissare le componenti ottiche e che a loro volta vanno fissate sui rispettivi basculatori. A tale fine è necessario conoscere la distanza alla quale porre la lente rispetto alla fibra e allo specchio di ingresso della cavità: il progetto di tali flange verrà dunque fatto in futuro.

introdurre fotofrafia tamburo

Fig. 4.8 Fotografia del tamburo: al centro si vede l' incavo per l' alloggio del secondo specchio della cavità-trasduttore.

introdurre fotografia

Fig. 4.9 Fotografia del basculatore della fibra, con le viti che realizzano i movimenti delle flange

foto basculatore specchio da lato con righello

Fig. 4.10 Fotografia del basculatore dello specchio.

introdurre fotografia come da didascalia

Fig. 4.11 Fotografia rappresentante i due basculatori della fibra e dello specchio correttamente montati.

introdurre fotografia dei tre pezzi visti dall' alto

Fig. 4.12 Fotografia che ritrae assieme il tamburo ed i basculatori della fibra e dello specchio.

§ 4.4- Bibliografia

[1] M. Bassan, F. Buratti, I. Modena, Il Nuovo Cimento B **109** (1994) 897

[2] Y. Ogawa, P. Rapagnani: Il Nuovo Cimento C **7** (1984) 21

[3] L. D. Landau, E. M. Lifsits: *Teoria dell' elasticità*, Editori Riuniti Edizioni Mir, Roma (1979)

[4] S. Timoshenko: *Theory of Plates and Shells*, Mc Graw-Hill, Singapore (1989)

[5] T. Sukuki et al., Phys. Lett. A **67** (1978) 2

[6] E. Coccia e T. O. Niinikoski, Lettere al Nuovo Cimento **41**(1984) 242

[7] P. Rapagnani, Il Nuovo Cimento C **5** (1982) 385

[8] J. -P. Zendri, *Realizzazione della catena di rivelazione per l' antenna gravitazionale AURIGA: trasduttore elttromeccanico, amplificatore a SQUID, ottimizzazione*, tesi di dottorato di ricerca in Fisica, Univ. di Padova , A. A. 1991-92

[9] L. Taffarello, comunicazione privata

[10] E. Stuani, E. Iurcotta, U. Genta, *Manuale tecnico del geometra e del perito agrario*, Signorelli, Milano (1977)

Capitolo 5

Misure sul sistema barra + trasduttore

§ 5.1 - Il sistema di sospensione della barra a temperatura ambiente

Come si è detto, il lavoro sperimentale presentato in questa tesi può essere diviso in due parti: da una parte le prove sulla meccanica del trasduttore ottico, fatte usando la barra a temperatura ambiente disponibile nell' ambito dell' esperimento AURIGA, e dall' altra le prove di ottica, effettuate con il trasduttore montato su un banco ottico. Descriviamo in questo capitolo la prima parte delle misure.

La barra a temperatura ambiente a disposizione è del tutto simile alla barra del rivelatore AURIGA: è anch' essa realizzata in Al5056 e ha le dimensioni elencate nella tabella Tab.5.1.

Tab. 5.1 Dimensioni della barra a temperatura ambiente

	A (mm)	B (mm)	C (mm)	D (mm)
1	617.97	1471.86	1.2	1.3
2	617.97	1471.88	1.2	1.4
3	617.98	2943.74	1.6	
4	617.98		1.2	
5			1.2	

La barra è inserita in un apposito contenitore da vuoto (cfr. Fig.5.1) di forma cilindrica realizzato in Acciaio spesso 1cm. Esso consta di tre distinte parti: un anello centrale, dotato di flange a tenuta da vuoto ed un anello di rinforzo, e due chiusure laterali, dette 'cappellotti', ciascuna delle quali è rimovibile e può essere attaccata al corpo centrale mediante sedici viti. Sull' anello centrale sono anche previste due flange ø300mm per i passanti da vuoto e, sul lato opposto, due boccole per le pompe da vuoto. Una pompa rotativa da 80m^3/ora ed una pompa roots da 400m^3/ora

realizzano un prevuoto di 10^{-3}mbar in circa un' ora, partendo dalla pressione atmosferica; una pressione di 10^{-5}mbar può essere poi raggiunta mediante una pompa a diffusione da 2000l/sec.

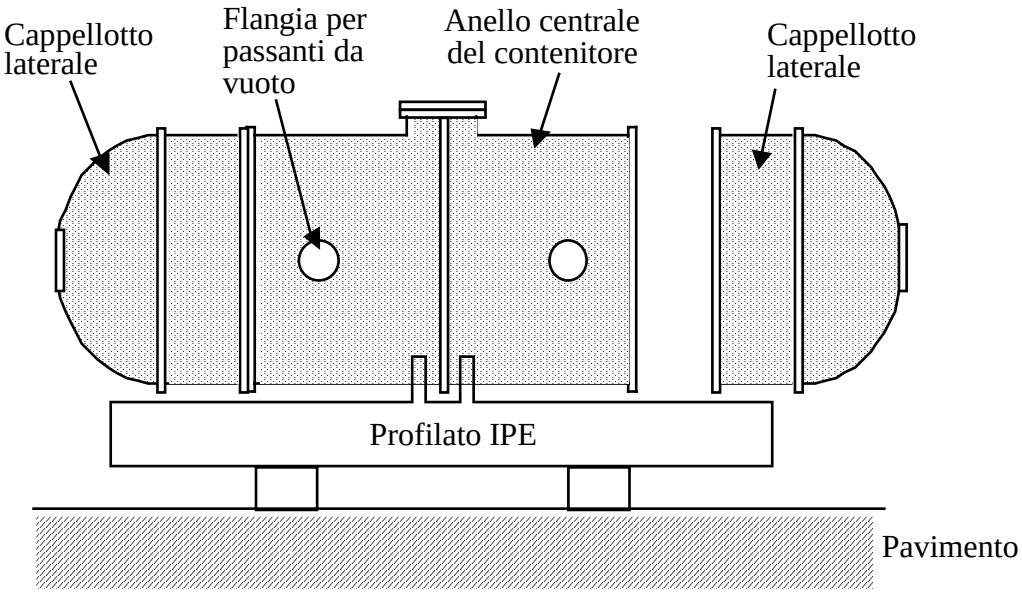

Fig. 5.1 Visione laterale del contenitore da vuoto; il disegno non e` in scala.

Al fine di isolare la barra il più possibile dalle vibrazioni meccaniche del terreno, sono previsti una serie di filtri meccanici prima del cavo ad U che sospende orizzontalmente all' interno del contenitore da vuoto la barra, cingendone la sezione baricentrale. Stadi di isolamento della vibrazione meccanica verticale si trovano sia all' interno del contenitore che all' esterno. Un primo smorzamento è dato dai quattro piedi su cui poggiano i due profilati IPE che sostengono il contenitore da vuoto (cfr. Fig.5.1); ciascuno di questi piedi (cfr. Fig.5.2) si compone di due pani di Sylomer poggianti su una lastra di Alluminio e su cui grava una massa di Piombo, stretta tra due lastre di Acciaio, per un totale di circa 92Kg; il Sylomer è uno speciale poliuretano che per le sue caratteristiche viene spesso utilizzato come interstrato elastico.

Nella figura Fig.5.3 riportiamo uno schema dell' interno del contenitore da vuoto.

Sul fondo dell' anello centrale del contenitore da vuoto (cfr. Fig.5.3) sono appoggiate sei mezze lune metalliche il cui scopo è quello di creare una superficie di appoggio piana e orizzontale; su ciascuna mezzaluna è attaccata una barretta di Metalgummy. Su di esse gravano nell' ordine, in un sistema a torre, una massa di piombo di 460Kg, altre 6 barrette di Metalgummy e un' altra massa di piombo di 460Kg. Su quest' ultima poggia un sistema di quattro cantilever realizzato in Alluminio sul quale è adagiato un anello anch' esso di Alluminio; da esso pende ad U

un cavo di Rame che cinge la sezione centrale della barra, sospendendola in posizione orizzontale.

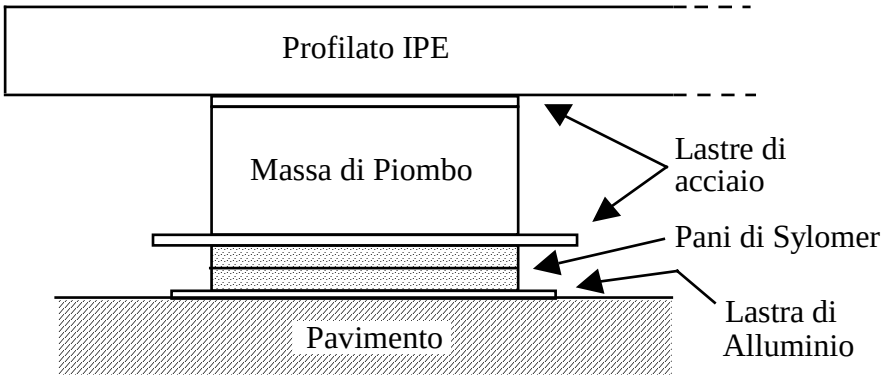

Fig. 5.2 Piede di appoggio dei profilati IPE; disegno non in scala

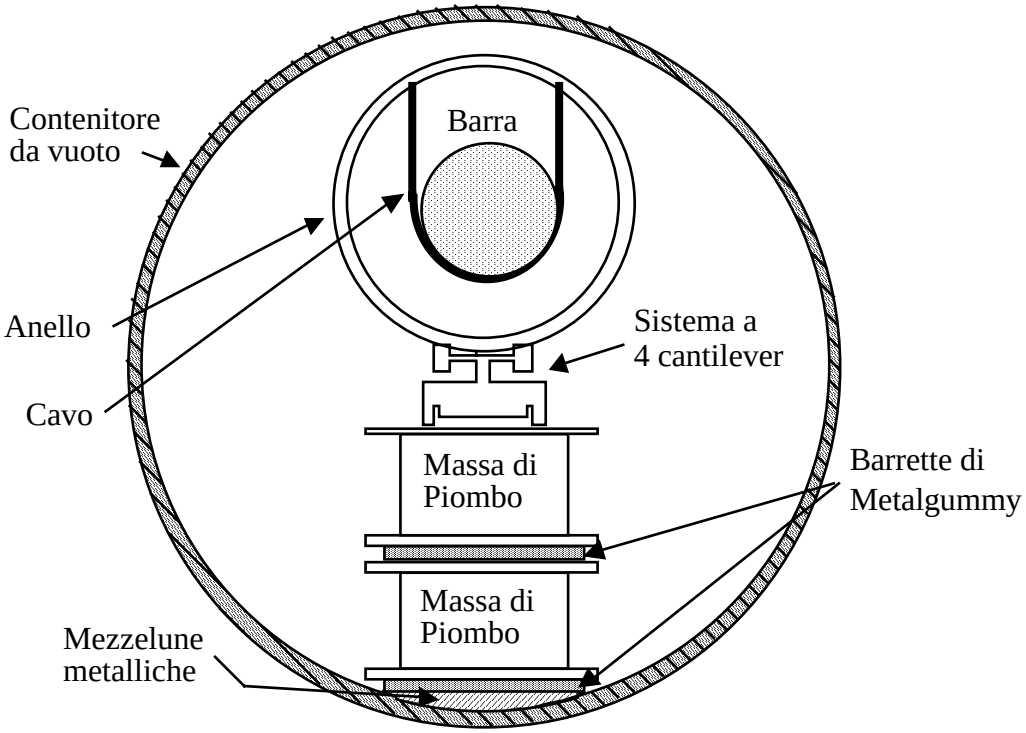

Fig. 5.3 Schema dell' interno del contenitore da vuoto con il sistema di sospensione della barra; il disegno non e` in scala

Questo complesso sistema per l' alloggio della barra, come detto, è pensato al fine di isolarla dalle vibrazioni verticali del suolo. Molti problemi di vibrazione possono essere ricondotti, in buona approssimazione, ad un modello fisico semplice, il cosidetto sistema molla-massa: l' approssimazione è buona soprattutto a basse frequenze, quando il comportamento degli oggetti come corpi continui non è

dominante e non appaiono le loro risonanze interne. Un sistema molla-massa può costituire un buon filtro meccanico per l’ attenuazione delle vibrazioni.

Il punto di vista del sistema molla-massa è utile per comprendere la filosofia in base alla quale è stato progettato il sistema di sospensione della barra e per studiarne le caratteristiche di attenuazione meccanica. In particolare possiamo pensare i pani di Sylomer e le barrette di Metalgummy come delle molle; le masse di piombo, invece, sono facilmente pensabili come delle masse inerti.

Il sistema a quattro cantilever è uno dei classici metodi impiegati per sospendere le barre di rivelatori risonanti di onde gravitazionali [1]: un cantilever è costituito da una sbarra dotata di massa con un estremo fisso e l’ altro libero. Quando l’ estremo libero viene caricato, il sistema è assimilabile ad un oscillatore armonico per frequenze inferiori alla frequenza del suo primo modo flessionale e può costituire un buon filtro meccanico.

L' anello da cui pende ad U il cavo di sospensione della barra è stato progettato in dimensioni, massa e materiale in modo tale da poter sostituire l’ analogo anello di rame all’ interno del criostato AURIGA; esso va pensato come una massa inerte. Il cavo, infine, è un modo molto usato per sospendere la barra e nel contempo isolarla dalle vibrazioni sismiche dell' ambiente esterno [2]: un cavo vincolato ad un estremo e caricato dall' altro con una massa costituisce un filtro meccanico. Oltre a ciò, il cavo ad U che cinge la sezione baricentrale della barra svolge l' importante ruolo di sospenderla e, nel contempo, lasciarla libera di vibrare nel suo modo fondamentale longitudinale: tale funzione è molto delicata in quanto può facilmente degradare il fattore di merito meccanico del rivelatore. Al di sotto della frequenza corrispondente al secondo modo longitudinale del cavo, esso può essere schematizzato come un oscillatore armonico per quanto riguarda le vibrazioni longitudinali. Per frequenze superiori ciò non è più valido in quanto il comportamento del cavo come corpo continuo diventa dominante e si evidenziano le sue risonanze longitudinali interne. Il cavo di sospensione della barra è progettato in modo tale che la frequenza fondamentale della barra sia inferiore alla frequenza del secondo modo longitudinale del cavo ma molto maggiore della frequenza del primo modo longitudinale: il cavo, dunque, è assimilabile come il parallelo di due molle cui è sospesa una massa pari a metà della massa della barra.

Interessa a questo punto conoscere la attenuazione totale realizzata dal sistema di sospensione della barra. A tale fine abbiamo svolto una serie di misure sperimentali volte a caratterizzare filtro per filtro l' attenuazione in verticale: una misura diretta dell' attenuazione complessiva è infatti risultata impossibile in quanto la sensibilità degli strumenti di misura non era sufficiente. Tutte le misure effettuate hanno seguito una stessa procedura, pur nella diversità della realizzazione pratica legata alle dimensioni e forme dei filtri in analisi; uno schema di tali misure è raffigurato in

Fig.5.4. Si eccita lungo la direzione verticale la base del sistema molla-massa e con due sensori si misura la vibrazione alla base del sistema (ingresso) e sulla sommità (uscita): dal rapporto tra le due quantità si ricava l' attenuazione in ampiezza.

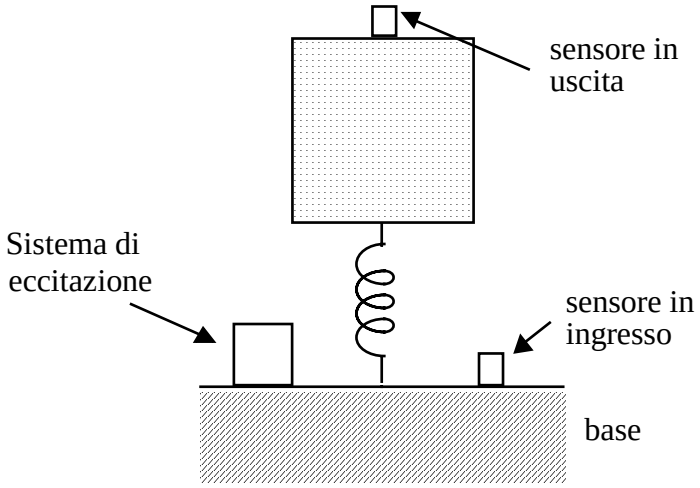

Fig. 5.4 Schema per le misure di attenuazione

Per quanto riguarda le misure dei filtri all' interno del contenitore da vuoto, tranne che per il cavo, l' eccitazione è stata fatta mediante una ceramica piezoelettrica (cfr. appendice) caricata da una massa di qualche Kg e a cui capi si mandava una tensione sinusoidale di frequenza variabile e di ampiezza picco-picco 40V. Come sensori si sono utilizzati diversi tipi di accelerometri (cfr. appendice) che, dopo uno stadio di preamplificazione, erano letti da due Lock-in Amplifier EG&G modello 5210. La ceramica piezoelettrica di eccitazione, come pure gli accelerometri di misura, sono stati resi solidali con il corpo su cui poggiavano mediante l' uso di nastro adesivo a doppia faccia. Per lo studio dell' attenuazione fornita dal cavo di rame l' eccitazione è stata realizzata fornendo una tensione sinusoidale a frequenza variabile ad una ceramica piezoelettrica posta come distanziatore tra il dado di fissaggio del cavo all' anello e l' anello stesso; inoltre abbiamo fissato rigidamente un accelerometro ad una delle estremità del cavo sporgenti dal dado di fissaggio e avvitato un secondo accelerometro sulla barra lungo la verticale, a pochi centimetri dalla sezione baricentrale. Tutte le misure di attenuazione all’ interno del contenitore sono state fatte ad una pressione di 10^{-5}mbar.

In quanto alla misura del grado di isolamento dato dai piedi su cui poggiano i profilati IPE abbiamo dovuto servirci per l' eccitazione di una sorta di martello prodotto dalla B&K, PM Vibration Exciter Type 4808, il quale è in grado di eccitare il suolo con maggiore intensità di quanto possa fare una ceramica piezoelettrica; tale strumento non si è potuto sistemare all' interno del contenitore per ragioni di ingombro. Purtroppo il rumore acustico sugli accelerometri di lettura, generato dal

martello, ha compromesso la misura, che dunque non riportiamo perchè non significativa: per una misura più efficace dell' attenuazione fornita dai piedi del contenitore si dovrebbero porre gli accelerometri all' interno di scatolette in grado di isolarli acusticamente dall' esterno.

Riportiamo nelle figure Fig.5.5, Fig.5.6 e Fig.5.7 il riassunto delle misure di attenuazione in spostamento per i filtri meccanici all' interno del contenitore. Nella curva di Fig.5.6 che descrive l' attenuazione fornita dal sistema costituito dai quattro cantilever, si nota la risonanza propria dell' anello vicina a 920Hz. Nella misura, infatti, per ragioni di ingombro abbiamo dovuto porre l' accelerometro di uscita sull' anello e quindi siamo stati sensibili anche alla sue risonanze.

Sommando le diverse curve si ricava che tra la base del contenitore da vuoto e la superficie cilindrica laterale della barra si ha una attenuazione in spostamento delle vibrazioni verticali di circa -130dB alla frequenza di 870Hz, corrispondente al modo longitudinale fondamentale della barra. A tale valore va ancora sommata l' attenuazione realizzata dai piedi su cui poggia il contenitore da vuoto.

Va infine notato che la barra è un oggetto risonante di cui si studia lo spostamento orizzontale delle facce mentre invece il rumore meccanico di vibrazione del terreno è in direzione verticale. Per tale ragione, al fine di determinare la densità spettrale del rumore meccanico sulle facce della barra alla risonanza, bisogna considerare sia il fattore di merito dell' oscillatore, sia un fattore che renda conto del fatto che il cavo che sospende la barra le trasmette disturbi che non agiscono direttamente sul modo longitudinale. Sia x_m la densità spettrale del rumore di vibrazione meccanica al suolo alla frequenza di risonanza della barra (espressa in $m/\sqrt{Hz}$), A_{dB} il valore dell' attenuazione totale in spostamento espressa in dB, σ il modulo di Poisson del materiale di cui è fatta la barra, Q il suo fattore di merito meccanico e R il raggio della barra. Si può allora ricavare che la densità spettrale x_{rb} (espressa in $m/\sqrt{Hz}$) del rumore in spostamento longitudinale delle facce della barra alla risonanza è [2]:

$$x_{rb}(\omega_0) = x_m 10^{-\frac{A_{dB}}{20}} Q \frac{\pi \sigma R}{L_b}$$

Poichè il livello di rumore meccanico ambiente a 870Hz al suolo è circa $10^{-14} m/\sqrt{Hz}$, l' attenuazione realizzata dal sistema di sospensione dovrebbe permettere di avere sulle facce della barra un rumore in spostamento di circa $6 \cdot 10^{-17} m/\sqrt{Hz}$, alla risonanza, senza considerare l' attenuazione dei piedi. Tale valore è sufficiente per osservare il rumore termico sulla barra pari a circa $10^{-14} m/\sqrt{Hz}$ alla risonanza e alla temperatura di 300K.

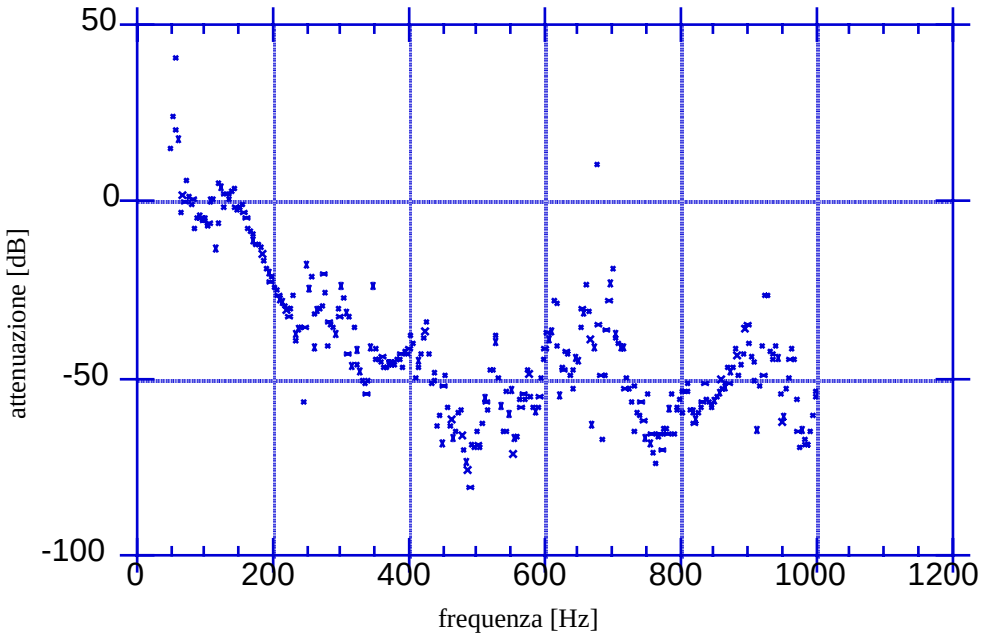

Fig. 5.5 Attenuazione misurata tra il fondo del contenitore da vuoto e la base su cui poggia il sistema a cantilever

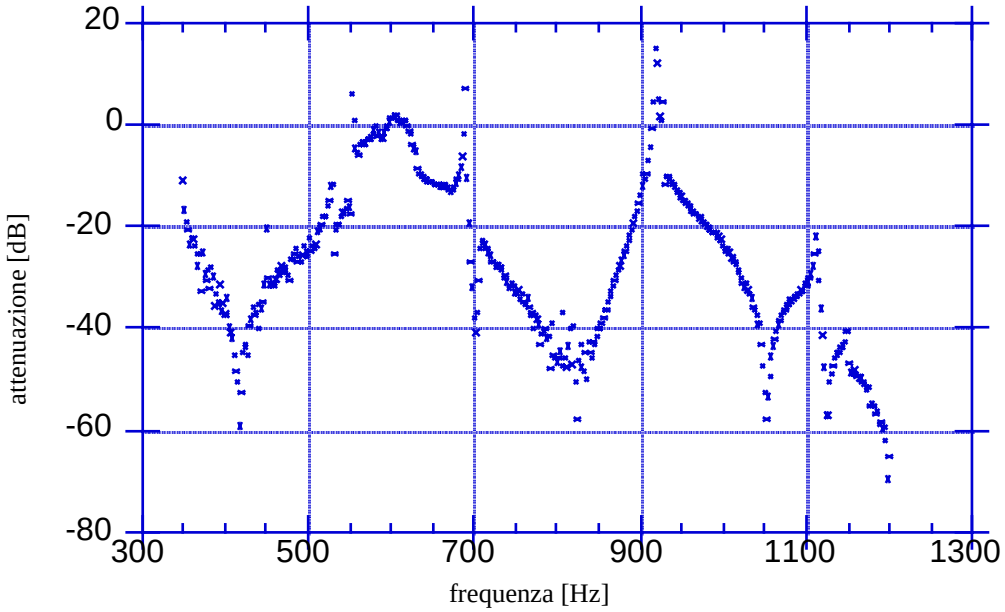

Fig. 5.6 Attenuazione misurata tra la base del sistema a cantilever e l'anello

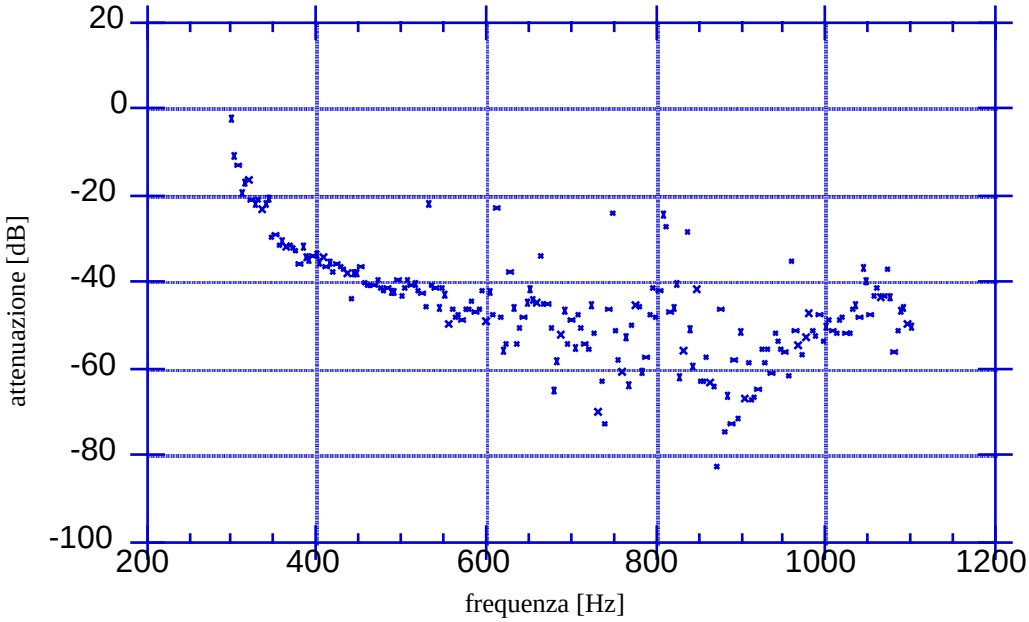

Fig. 5.7 Attenuazione misurata tra l' estremità del cavo e la barra

§ 5.2 - Misure sulla barra a temperatura ambiente

Prima di poter montare il trasduttore sulla barra è necessario conoscere di quest' ultima la frequenza di risonanza ed il fattore di merito meccanico. Inserendo i valori di Tab.5.1 nella formula che fornisce la frequenza del primo modo longitudinale della barra data nel §1.3, si ottiene una stima teorica per la frequenza di 884Hz.

Sia le misure di frequenza che del fattore di merito meccanico sono abbastanza delicate; per limitare il disturbo causato dal rumore acustico del capannone in cui si trova la barra e non degradare il fattore di merito Q da misurare, è necessario svuotare il contenitore fino alla pressione di 10^{-4}mbar [3]. Poichè, inoltre, la barra possiede un alto fattore di merito, è necessario studiare la curva di risonanza ad intervalli molto piccoli: a tal fine è stato necessario utilizzare un generatore di segnali stabilizzato in frequenza. D' altra parte non è stato possibile raccogliere sufficienti misure in una stessa configurazione sperimentale per descrivere la curva di risonanza e ricavare da essa la frequenza centrale e il fattore di merito. Tale operazione, infatti, avrebbe comportato un tempo di presa dati di circa un paio d' ore: in tale tempo, tuttavia, la temperatura della barra avrebbe potuto cambiare e quindi falsare la determinazione della frequenza di risonanza, che è funzione della temperatura, e del fattore di merito. Il sistema di sospensione e alloggio della barra non è infatti in grado di garantirne una buona termalizzazione. Le misure di temperatura sono state fatte mediante un termometro al silicio (modello DT-470-CU prodotto dalla Lake Shore Cryotronics) che abbiamo fissato mediante una vite sulla barra lungo la verticale, a pochi centimetri dalla sezione baricentrale.

Poichè la misura del fattore di merito meccanico è piuttosto delicata in quanto si rischia facilmente di degradarlo, si è dovuto rendere l' apparato sperimentale connesso alla barra quanto più essenziale possibile.

In conclusione su entrambe le facce della barra coassialmente si è avvitato un dischetto di ceramica piezoelettrica PZT4 prodotto dalla Morgan Matroc Limited, in modo tale che la direzione di polarizzazione fosse parallela all' asse longitudinale della barra: abbiamo usato uno dei due piezoelettrici per eccitare la barra e l' altro come sensore di vibrazione. In Fig.5.8 raffiguriamo la vite a cui è incollato il disco piezoelttrico.

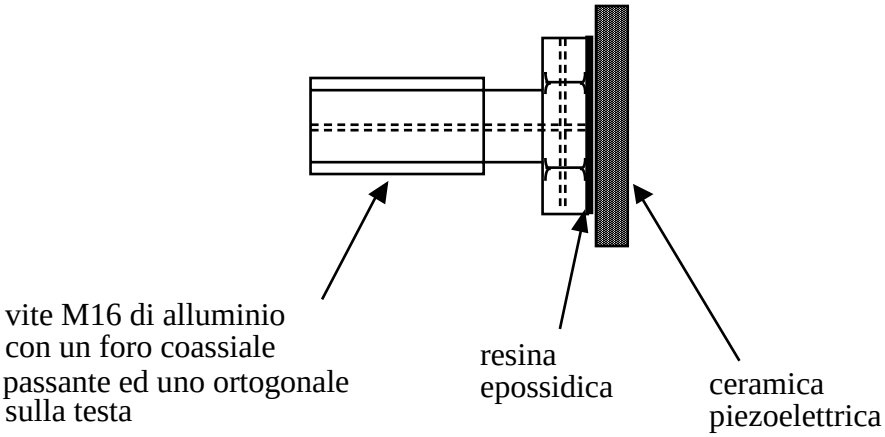

Fig. 5.8 Schema di un piezoelettrico usato per la misura di frequenza di risonanza e fattore di merito della barra; il disegno non è in scala

Nella figura Fig.5.9 riportiamo uno schema della configurazione sperimentale: un generatore di onde sinusoidali HP3325B stabilizzato in frequenza è connesso ai capi del piezoelettrico di eccitazione. Il segnale di tensione sviluppato ai capi del piezoelettrico di lettura è amplificato da un amplificatore EG&G PARC e poi mandato ad un Lock-in Amplifier EG&G modello 5210.

La misura della frequenza di risonanza è stata fatta determinando la frequenza del segnale di eccitazione che sviluppava la massima tensione ai capi del piezoelettrico di lettura; con la stessa procedura abbiamo determinato la larghezza a $1/\sqrt{2}$ del valore del massimo della curva di risonanza. Abbiamo anche ottenuto una seconda ed indipendente determinazione del fattore di merito meccanico della barra misurando il tempo τ di decadimento delle oscillazioni alla risonanza e sfruttando la relazione (1.18): a tale scopo abbiamo eccitato la risonanza della barra, spenta l' eccitazione e letta l' ampiezza in uscita dal lock-in mediante un programma di acquisizione scritto nell' applicazione LabView.

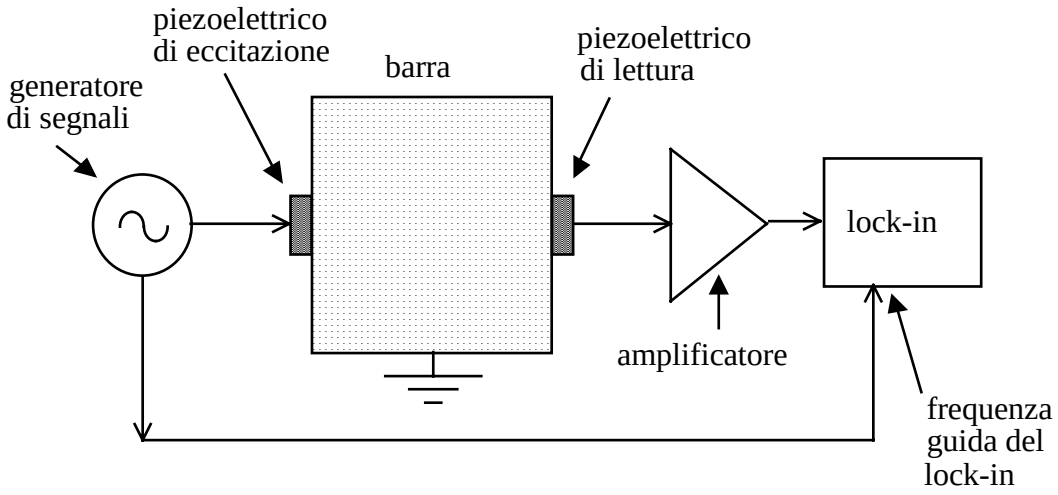

Fig. 5.9 Schema della configurazione sperimentale per la misura di frequenza e fattore di merito della barra

In figura Fig.5.10 mostriamo il decadimento nel tempo del segnale sviluppato ai capi del piezoelettrico di lettura, con la curva esponenziale interpolante.

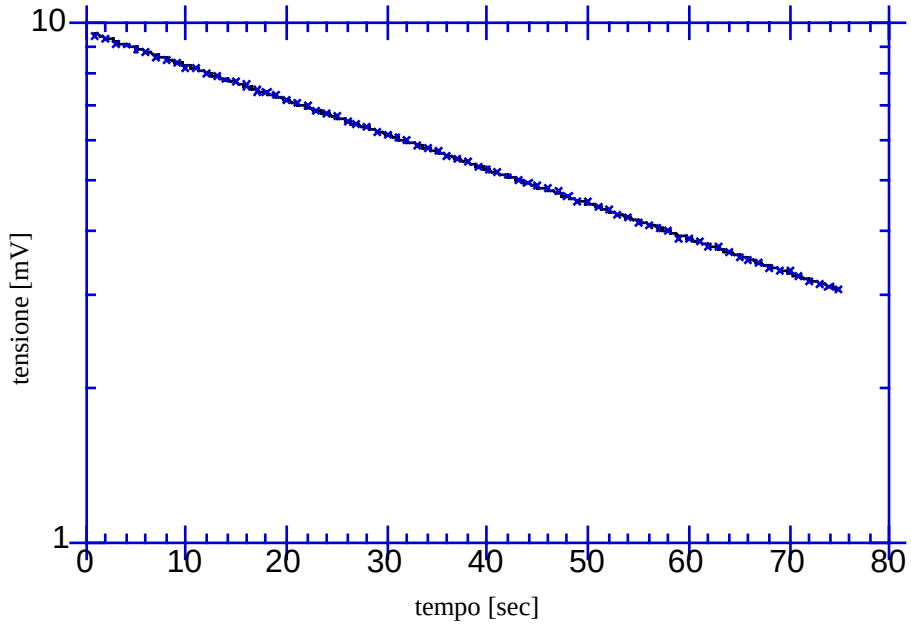

Fig. 5.10 Decadimento della ampiezza di oscillazione della barra

Le misure della frequenza di risonanza e del fattore di merito meccanico sono state ripetute a diversi valori della temperatura della barra: ciò al fine di studiare la dipendenza dalla temperatura della frequenza di risonanza, che si stima essere di circa -0.3Hz/°C a temperatura ambiente [3]. Purtroppo l' intervallo di temperatura in cui è stato possibile ripetere le misure è piuttosto ridotto, come è evidente dalla tabella Tab.5.2 nella quale sono elencati i risultati delle misure svolte. Poichè il termometro

usato è affetto da un errore sistematico di calibrazione, riferiamo i valori di temperatura ad un certo valore T_0 fissato, che si stima essere circa 18°C. I valori di fattore di merito misurati risultano in accordo con i valori tipici della lega Al5056 dell' alluminio alle stesse temperature [4].

Tab. 5.2 Riassunto delle misure di frequenza di risonanza e fattore di merito

T [°C]	freq. di ris. [Hz]	Q
$T_0 \pm 0.04$	874.803 ± 0.001	$(180 \pm 1) \cdot 10^3$
$T_0 + 0.04 \pm 0.04$	874.795 ± 0.001	$(181 \pm 1) \cdot 10^3$
$T_0 + 0.17 \pm 0.04$	874.759 ± 0.001	$(179 \pm 1) \cdot 10^3$
$T_0 + 0.21 \pm 0.04$	874.750 ± 0.001	$(181 \pm 1) \cdot 10^3$
$T_0 + 0.23 \pm 0.04$	874.747 ± 0.001	$(181 \pm 1) \cdot 10^3$
$T_0 + 0.34 \pm 0.04$	874.713 ± 0.001	$(181 \pm 1) \cdot 10^3$

Non è stato possibile ricavare un valore attendibile per l' errore statistico sulle temperature in base alle caratteristiche degli strumenti usati fornite dalla ditta costruttrice. Per tale ragione l' errore sulla temperatura riportato nella Tab.5.2 è stato stimato dallo studio della dipendenza della frequenza di risonanza del primo modo longitudinale dalla temperatura, come segue.

Poichè l' errore sulla determinazione della frequenza di risonanza della barra si stima essere percentualmente trascurabile rispetto all' errore sulla temperatura, conviene graficare i punti sperimentali mettendo in ascissa la frequenza ed in ordinata la temperatura. Si assume che la dipendenza delle frequenza di risonanza dalla temperatura sia lineare: tale ipotesi è ragionevole anche in considerazione del piccolo intervallo di temperatura studiato. A questo punto si interpolano linearmente i punti sperimentali e si sceglie come valore di errore sulla temperatura quello che rende pari ad 1 il valore del χ^2 del fit. In base poi ai parametri del fit si determina il tasso di variazione della frequenza di risonanza del primo modo longitudinale della barra con la temperatura, che è la quantità cercata. Si ottiene per essa il valore di:

$$-(0.26 \pm 0.03)\frac{\mathrm{Hz}}{^{\circ}\mathrm{C}}$$

Tale risultato è in accordo con il valore riportato in [3] di circa -0.3Hz/°C. Nella figura Fig.5.11 mostriamo i punti sperimentali di frequenza e temperatura elencati in Tab.5.2.

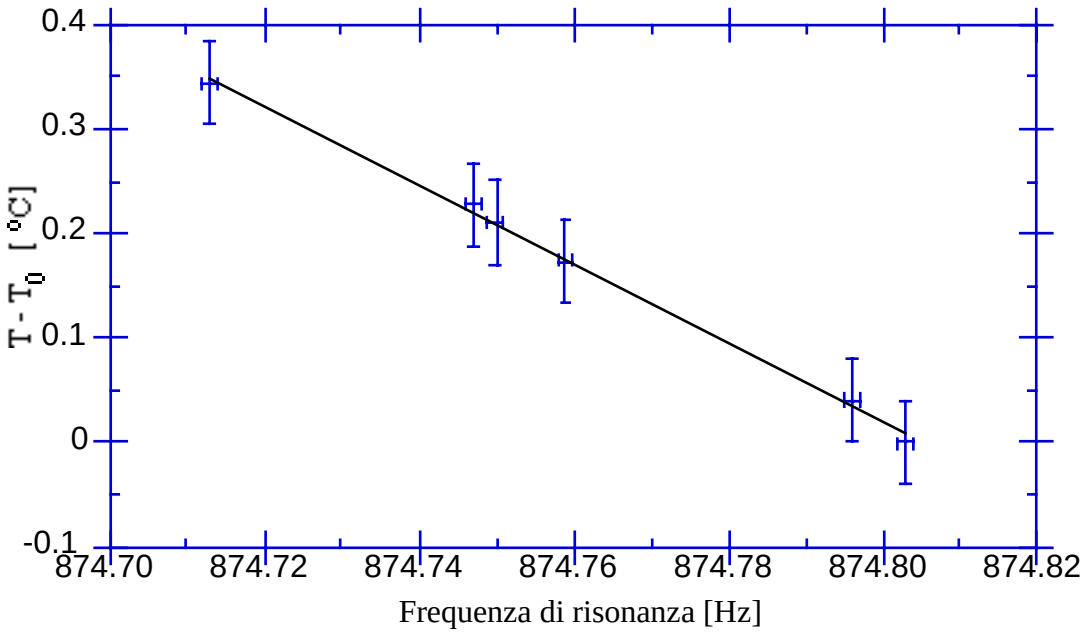

Fig. 5.11 Andamento della frequenza di risonanza della barra con la temperatura; l' errore sulle ordinate é stimato imponendo uguale a 1 il χ^2

§ 5.3 - Misure sul sistema barra-trasduttore

Una volta realizzato il trasduttore come descritto nel capitolo precedente, lo abbiamo montato sulla barra di cui al paragrafo §5.2: se la frequenza del trasduttore è molto vicina a quella della barra allora ci si aspetta che, ancorato il trasduttore ad essa, le frequenze di risonanza dei due oscillatori si accoppino secondo quanto esposto nel paragrafo §2.2. Indichiamo con *modo* + il modo corrispondente al segno più nelle (2.7) e (2.10), con *modo* - il modo corrispondente al segno meno. Le misure che abbiamo effettuato erano volte alla determinazione delle frequenze dei due modi e dei loro rispettivi fattori di merito.

L' assemblaggio del trasduttore ed il suo montaggio sulla barra sono operazioni delicate in quanto un non buono centraggio dei vari pezzi tra loro od un debole fissaggio delle viti comportano facilmente l' introduzione di fattori di dissipazione meccanica. Per tale ragione ove possibile abbiamo stretto le viti per mezzo di una chiave dinamometrica in modo da essere certi di stringerle saldamente ed in modo calibrato. Tutte le viti di cui si e` fatto uso sono realizzate in Ergal e non si sono utilizzate rondelle, con l’ eccezione delle otto viti M3 in Acciaio dei due basculatori che muovono le lamine verticali dei basculatori (cfr. Fig.4.9 e Fig.4.11): per le quattro

del basculatore della fibra, inoltre, si sono usate altrettante rondelle in ottone. Una delle prove che abbiamo fatto è stato cercare di capire se e quanto tali viti deteriorino il fattore di merito meccanico.

Per montare il trasduttore su una delle facce della barra occorre montare sull' altra un apposito contrappeso per mantenere la barra in equilibrio sul cavo ad U che la sostiene. Il contrappeso è stato realizzato in Alluminio nell' officina meccanica dei Laboratori Nazionali di Legnaro dell' I.N.F.N; esso viene fissato alla barra mediante un' unica vite, in Ergal, coassiale alla barra (cfr. Fig.5.12), con foro passante centrale. Il contatto con questa è limitato ad una piccola corona circolare centrata sulla vite: questa geometria per il contrappeso è quella che in passato si è rivelata degradare di meno il fattore di merito meccanico del sistema [3].

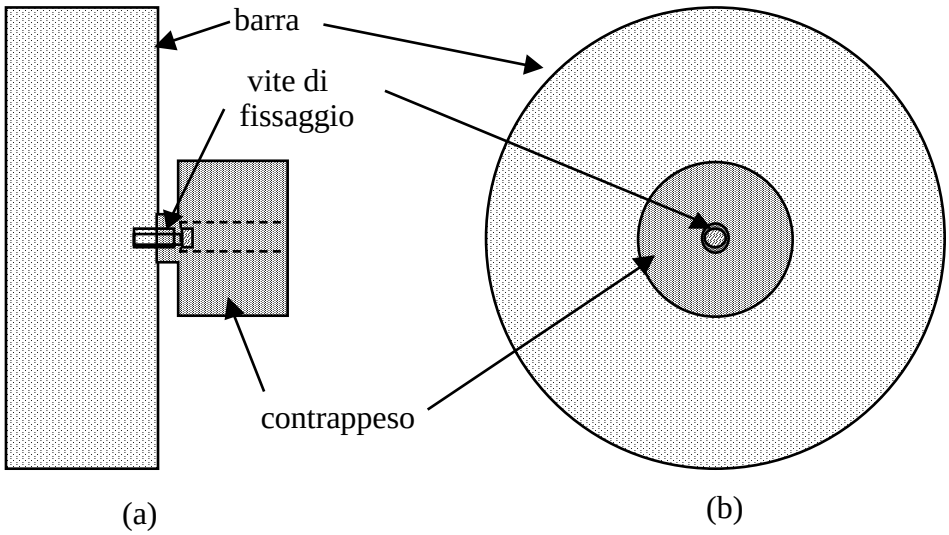

Fig. 5.12 Il contrappeso: (a) in sezione, (b) frontalmente.
Disegno non in scala

La massa totale del contrappeso e della vite di fissaggio è pari a (9007 ± 1)gr. Il baricentro è tale che, montato il trasduttore su una faccia della barra e il contrappeso sull' altra, l' asse longitudinale della barra è inclinato rispetto all' orizzontale di circa 3 decimi di grado, risultato piuttosto soddisfacente. Garantire l' orizzontalità della barra è importante per disaccoppiare quanto più la barra stessa dal cavo che la sospende e lasciarla libera di vibrare nel modo fondamentale longitudinale.

Nella figura Fig.5.13 riportiamo una foto raffigurante il trasduttore montato sulla barra.

cancellare questa figura e inserire il file

ant+trasdu ott

che é la foto del trasdu sulla barra.
la dimensione di questa figura dovrebbe essere
quella della foto.

Fig. 5.13 Il trasduttore ottico montato sulla barra

Prima di studiare le frequenze ed i fattori di merito dei modi + e -, abbiamo controllato che il trasduttore non presenti frequenze di risonanza prossime a 1KHz o minori. A tale fine in fase di montaggio abbiamo attaccato al trasduttore con del nastro adesivo a doppia faccia tre accelerometri PCB modello 309A, del peso di circa 1gr ciascuno. Uno di essi è stato posto sulla flangia superiore del basculatore della fibra, un altro sulla flangia superiore del basculatore dello specchio ed uno al centro del tamburo, sull' incavo per l' alloggio del secondo specchio della cavità-trasduttore. Montato poi il trasduttore sulla barra abbiamo letto l' uscita degli accelerometri con un analizzatore di spettro e cercati eventuali picchi di risonanza eccitando il sistema con dei colpetti dati a mano sulla barra e sul trasduttore. Si è poi chiuso il contenitore e fatto il vuoto: in tale modo abbiamo potuto studiare più agevolmente i picchi di risonanza evidenziati. In questo caso per eccitare il sistema abbiamo avvitato alla barra un piezoelettrico in modo simile a quello in figura Fig.5.8, ma di dimensioni maggiori rispetto a quelle del piezoelettrico usato nelle misure di frequenza e fattore di merito della barra. Questo studio ha permesso di escludere la presenza di risonanze del trasduttore (ad eccezione di quella, voluta, a circa 880Hz) a frequenze inferiori a 1.1KHz.

Una volta accertata l' assenza di fastidiose risonanze del trasduttore, abbiamo cercato di determinare la frequenza ed il fattore di merito meccanico dei due modi + e -. A tale fine si sono tolti i due accelerometri sui basculatori. Abbiamo cercato per la

misura la configurazione sperimentale che risultava in valori maggiori dei fattori di qualità Q dei due modi (nel seguito indicati anche con Q_+ e Q_-): sensibili miglioramenti, soprattutto per quanto riguarda Q_-, si sono avuti quando si è eliminato del tutto l' uso del nastro adesivo a doppia faccia sul trasduttore e sulla barra e quando si sono strette maggiormente le diverse viti.

Nella tabella Tab.5.3 riportiamo le misure di frequenza di risonanza dei due modi e relativi fattori di merito ottenuti nella configurazione sperimentale migliore; le misure si riferiscono ad una temperatura della barra di $T_0+(0.32\pm 0.04)°C$ e sono state fatte in un vuoto di $6\cdot 10^{-4}$mbar. Le misure di frequenza e di fattore di merito meccanico sono state fatte come per la barra; per eccitare il sistema è stato necessario aggiungere al piezoelettrico di Fig.5.8 una massa di circa una decina di grammi, in modo da trasdurre più forza. Le misure di Q fatte guardando il decadimento in ampiezza e misurando la larghezza a $1/\sqrt{2}$ del valore del massimo della lorentziana di risonanza sono risultate compatibili entro gli errori sperimentali.

Tab. 5.3 Riassunto delle misure sul sistema barra+trasduttore

	frequenza [Hz]	fattore di merito
modo -	857.028 ± 0.004	19500 ± 400
modo +	893.85 ± 0.01	9200 ± 300

Il fattore di merito meccanico del modo - risulta notevolmente superiore a quello del modo +: una situazione analoga si è presentata già per il trasduttore risonante capacitivo [3]. La stessa spiegazione vale per entrambi i casi: a causa del fatto che i due oscillatori, barra e trasduttore, non hanno esattamente la stessa frequenza di risonanza, risulta che le frequenze non si mescolano perfettamente ma uno dei due modi è più dovuto alla barra e l' altro più dovuto al trasduttore. Poichè è la barra ad avere il fattore di merito meccanico migliore, grazie anche alla sua geometria essenziale, è evidente che il modo che è maggiormente dovuto alla barra possiede fattore di merito più elevato. Una conferma di ciò viene fornita dallo stesso modello a due oscillatori descritto nel paragrafo §2.2, ove però si associ a ciascuno di essi la corrispondente forza dissipativa.

Dalle misure di frequenza di Tab.5.3 è possibile risalire alla frequenza di risonanza del trasduttore, nota quella della barra, secondo la formula (2.9). In realtà nella (2.9) non si deve inserire il valore della frequenza di risonanza trovato nel paragrafo precedente, in quanto esso si riferisce alla barra da sola. Al contrario, è stato evidenziato che la frequenza del primo modo longitudinale della barra cambia, in rapporto alla massa totale non risonante che le si aggiunge sulle facce, di una quantità

Δ=-(0.38$\pm$0.02)Hz/Kg, a temperatura ambiente [5], [6]. La massa complessiva non risonante aggiunta alla barra quando si monta il trasduttore ed il contrappeso è pari a (16.68$\pm$0.03)Kg; da ciò si deduce che la frequenza di risonanza della barra quando le viene montata sulle facce una massa totale pari alla massa del trasduttore e del contrappeso è inferiore, rispetto alle misure di Tab.5.2, di una quantità $\Delta\nu$ pari a (6.3$\pm$0.3)Hz. Otteniamo dunque che, alla stessa temperatura alla quale si riferiscono i valori di Tab.5.3, la frequenza di risonanza della barra da inserire nella (2.9) è:

$$\nu_0 = (868.4 \pm 0.3)\text{Hz}$$

Da ciò si ottiene in base alla formula (2.9) una frequenza di risonanza del trasduttore pari a:

$$\nu_t = (882.1 \pm 0.3)\text{Hz}$$

Tale valore può essere confrontato con la previsione fatta sul modello sviluppato nel paragrafo §4.1, di 769Hz; come ci si aspettava, il modello fornisce un risultato affidabile solo entro il 15%. Va aggiunto inoltre che, se si renderà necessario, è possibile avvicinare ulteriormente alla frequenza di risonanza della barra quella del trasduttore, pelandone lievemente le dimensioni.

Conoscendo la frequenza di risonanza della barra e le frequenze dei modi - e + si può risalire al rapporto μ tra la massa efficace del trasduttore e la massa efficace della barra, tramite la formula (2.10). Inserendo in essa i valori sperimentali di ν_+ e ν_- e quello appena ricavato di ν_0 , si ottiene:

$$\mu = (1.46 \pm 0.05) \cdot 10^{-3}$$

Poichè la massa della barra con il carico del trasduttore e del contrappeso è pari a (2348$\pm$2)Kg, allora si ricava per la massa efficace del trasduttore il valore:

$$m_t = (1.71 \pm 0.06)\text{Kg}$$

Tale valore è abbastanza sorprendente in quanto ci si aspetta che la massa efficace del trasduttore, che ne descrive la parte risonante come un oscillatore armonico, sia poco inferiore alla massa gravitazionale di quest' ultima, che è pari a (1.25$\pm$0.03)Kg. Probabilmente l' anello esterno a cui è attaccata la lamina risonante del tamburo non è sufficientemente massiccio e in qualche modo partecipa anch' esso al moto di risonanza del trasduttore. Indicazioni in tal senso si sono avute da alcune prove effettuate sul trasduttore non ancorato alla barra. La questione andrebbe forse approfondita da un punto di vista sperimentale continuando tali prove: per diversi

motivi di ordine tecnico non si è potuto però svolgere soddisfacentemente tale indagine nell' ambito del lavoro di questa tesi.

Abbiamo controllato se e quanto le viti in Acciaio dei basculatori e le rondelle in ottone peggiorino il fattore di merito meccanico: a tal fine abbiamo ripetuto le misure di Q dei due modi dopo avere tolto tali viti e rondelle. Mentre il fattore di merito del modo + è rimasto invariato entro gli errori di misura, quello del modo - è peggiorato portandosi a $Q_-=(18000\pm 200)$. Ciò si può spiegare col fatto che, lasciate libere, le flange dei basculatori vibrano, dissipando energia. Sarebbe infine interessante ripetere le misure del fattore di merito sostituendo le viti di Acciaio e rondelle di ottone dei basculatori con simili pezzi in alluminio: ciò dovrebbe portare ad un miglioramento del fattore di merito, soprattutto del modo -.

Si sono infine ripetute le misure del fattore di merito dei due modi dopo avere incollato sul tamburo, nell' incavo previsto, lo specchio che sarà il secondo specchio della cavità-trasduttore (cfr. paragrafo §3.4). Si è utilizzata la colla SuperAttak, che presenta i vantaggi di essere facilmente reperibile, a presa rapida e poter essere sciolta dall' acetone. Con questa misura si è voluto determinare se l' incollaggio delle componenti di ottica sul trasduttore degradi il fattore di merito meccanico. Entro gli errori sperimentali, non si è rivelata alcuna variazione dei fattori di merito dei due modi; la misura andrà comunque ripetuta una volta che si siano incollate o diversamente fissate al trasduttore tutte le componenti di ottica. Sulla scorta di quanto appena visto, tuttavia, non ci si aspettano notevoli peggioramenti: abbiamo notato infatti che è soprattutto la dissipazione sulla parte risonante del trasduttore che limita il fattore di merito del sistema.

§ 5.4 - Bibliografia

[1] E. Coccia, Rev. Sci. Instrum. **53**, 2 (1982) 148

[2] G. Pizzella, *Fisica sperimentale del campo gravitazionale*, La Nuova Italia Scientifica (Roma) 1993

[3] J. -P. Zendri, *Realizzazione della catena di rivelazione per l' antenna gravitazionale AURIGA: trasduttore elttromeccanico, amplificatore a SQUID, ottimizzazione*, tesi di dottorato di ricerca in Fisica, Univ. di Padova, A. A. 1991-92

[4] E. Coccia, T. O. Niinikoski, Lett. Nuovo Cimento **41** (1984) 242

[5] E. Cavallini, *Isolamento dalle vibrazioni per risonatori meccanici: applicazione all' antenna AURIGA*, tesi di laurea in Fisica, Univ. di Ferrara, A. A. 1992-93

[6] S. Paoli, *Il problema della calibrazione dell' antenna per onde gravitazionali AURIGA*, tesi di laurea in Fisica, Univ. di Trento, A. A. 1992-93

Capitolo 6

Misure di ottica su banco

§ 6.1 - Apparato sperimentale per le misure di ottica

Parte del lavoro di tesi è consistito nell' attrezzare e rendere operativo un laboratorio di ottica nell' ambito dell' esperimento AURIGA, che possa servire per la realizzazione del trasduttore ottico: era totalmente assente, infatti, anche la più basilare strumentazione di ottica necessaria, oltre che la stessa sorgente laser. Ove possibile e/o necessario, i supporti meccanici per i componenti ottici sono stati eseguiti nell' officina meccanica dei Laboratori Nazionali di Legnaro dell' I.N.F.N., su nostro disegno; le gambe stesse su cui poggia il banco ottico sono state realizzate sulla base di un nostro progetto. Ciò ha permesso di applicare le nozioni di attenuazione delle vibrazioni meccaniche del suolo acquisite nel corso delle misure di cui al paragrafo §5.1. Nella figura Fig.6.1 riportiamo una foto del banco ottico all' interno del capannone AURIGA presso i Laboratori Nazionali di Legnaro.

introdurre fotografia banco ottico

Fig. 6.1 Il banco ottico all' interno del capannone AURIGA con l' apparato sperimentale

Il lavoro sperimentale svolto ha permesso di conoscere il rumore in potenza della sorgente laser a nostra disposizione, descritta più sotto, e di osservare la risonanza ottica della cavità-trasduttore, che abbiamo realizzato. La configurazione sperimentale delle misure è illustrata nella Fig.6.2.

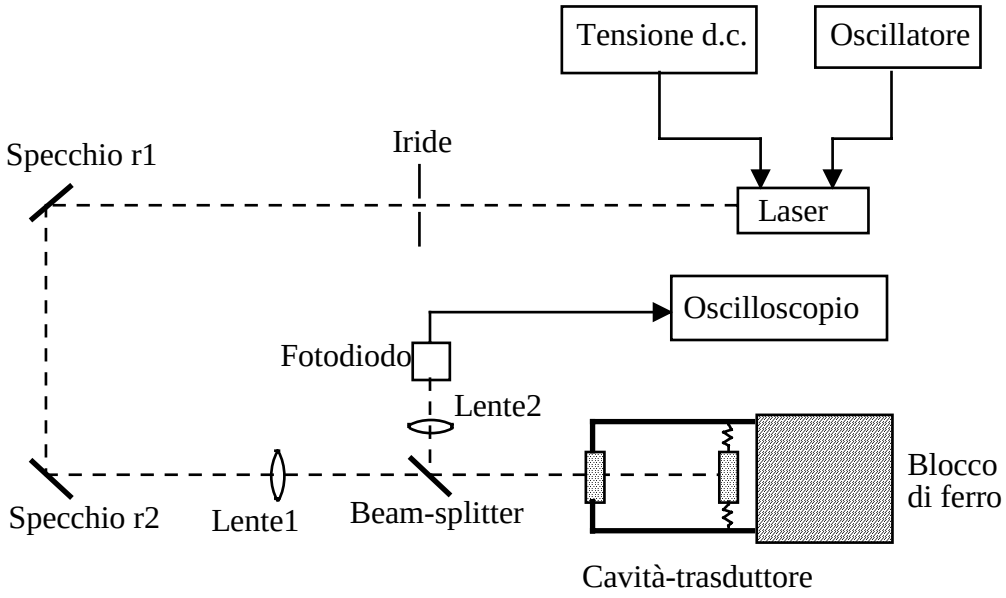

Fig. 6.2 Schema per la realizzazione della cavità-trasduttore

Il fascio prodotto dalla sorgente laser è stato fatto incidere a 45˚ sugli specchi r1 e r2, detti specchi di rimando, montati ciascuno su un basculatore. Tali specchi sono prodotti dalla CVI modello Y10-1037-45-S e posseggono riflettività nominale superiore a 0.99 per radiazione nel vicino infrarosso incidente a 45˚. Tra la sorgente ed il primo specchio di rimando si è anche frapposta un' iride. Si è fatto passare il fascio laser riflesso dallo specchio r2 attraverso la lente1 di focale f_1=500mm che serve per adattare il waist del fascio, come si vedrà nel paragrafo §6.3; il fascio poi attraversava un beam-splitter cubico al 50% ed incideva sulla cavità-trasduttore. La luce da questa riflessa veniva poi deviata dal beam-splitter e raccolta da un fotodiodo. Esso era posto sul fuoco della lente2 di focale f_2=100mm: in tal modo è stato possibile raccogliere tutta la luce riflessa dal bem-splitter. Il fotodiodo utilizzato è il modello UDT100 della UDT che ha una sensibilità nominale di 0.1A/W per lunghezze d' onda di 1μm.

La frequenza della luce laser veniva fatta variare tramite un generatore di tensione d.c. ed un generatore di segnali, come chiarito più sotto. Il segnale prodotto dal fotodiodo era visualizzato su un oscilloscopio.

Prima di descrivere in maggiore dettaglio le misure svolte diamo una breve descrizione della sorgente laser usata, che si pensa di utilizzare anche in futuro per la realizzazione del trasduttore ottico.

Il laser

Il laser da noi utilizzato è prodotto dalla Lightwave Electronics, modello 126-1064-050, di potenza nominale pari a 50mW e lunghezza d' onda di 1.064μm. Esso è costituito da un monocristallo di Nd:YAG, nel quale atomi di Neodimio, aggiunti ad un cristallo di Ittrio alluminato, sono responsabili dell' emissione luminosa alla lunghezza d' onda di 1.064μm. Il laser è di tipo NPRO (acronimo di Non Planar Ring Oscillator). In Fig.6.3 mostriamo lo schema completo del laser: in essa le linee tratteggiate rappresentano il cammino della luce all' interno del cristallo, cammino che è ad anello non complanare. Il pompaggio è realizzato mediante un diodo laser; tale fatto permette di ridurre notevolmente il rumore in potenza e frequenza rispetto a quello di laser il cui pompaggio avviene per mezzo di lampade a bagliore. La presenza inoltre di un campo magnetico assieme alla non planarità del cammino della luce nel cristallo forza il laser ad oscillare in un unico modo del campo elettromagnetico [1].

La frequenza del laser può essere variata in due modi: uno di essi consiste nel variare la temperatura del monocristallo. Al di sotto di questo è infatti posto un termoregolatore (heater) il quale, se alimentato da una opportuna tensione, è in grado di variare la temperatura del cristallo. Il suo riscaldamento comporta da una parte l' espansione del cristallo stesso, dall' altra un aumento dell' indice di rifrazione del Nd:YAG; entrambi tali effetti concorrono a diminuire la frequenza di emissione del laser. In questo modo è possibile un controllo della frequenza del laser in un intervallo dell' ordine della decina di GHz con costanti di tempo di circa 1-10sec (controllo SLOW) [1].

Fig. 6.3 Schema del laser

Il controllo della frequenza di emissione del laser può essere fatto in modo molto più rapido attraverso un piezoelettrico posto al di sopra del cristallo. Applicando una tensione al piezoelettrico è possibile contrarre od espandere il cristallo: in questo modo la frequenza del laser può essere variata di qualche decina di MHz a ritmi molto veloci, e cioè fino a circa 30KHz (controllo FAST). A frequenze superiori la ditta produttrice non garantisce più la linearità della variazione della frequenza del laser in funzione del voltaggio applicato al piezoelettrico e informa di un effetto indesiderato di variazione della potenza di emissione del laser [1].

I dati tecnici forniti dalla casa produttrice riguardo alla sorgente laser in nostro possesso indicano che la potenza del laser è 62.2mW e che è presente un rumore in potenza rms percentuale dello 0.042%, sulla banda di frequenza tra 5Hz e 1MHz. Il controllo SLOW della frequenza del laser tramite il termoregolatore ha un fattore di conversione di +5GHz/Volt; il fattore di conversione dell' attuatore piezoelettrico è di 4.00MHz/Volt.

§ 6.2 - Il rumore in potenza del laser

La prima misura sperimentale di ottica effettuata è volta alla determinazione del rumore in potenza del laser. A tal fine si è frapposta una lente di focale f=100mm tra la sorgente laser e l' iride di Fig.6.2; sul fuoco della lente si è posto un fotodiodo, montato in un circuito come in Fig.6.4. Con un voltmetro si è misurata la tensione V_f da esso sviluppata e ne si è osservato lo spettro di rumore con un analizzatore di spettro. Assumendo il valore di efficienza del fotodiodo come esatto, la massima potenza P_0 osservata è stata di (61.5 ± 0.5)mW: tale valore risulta coerente con il dato di potenza fornito dalla casa produttrice di 62.2mW, in considerazione anche delle perdite per riflessione sulla lente usata.

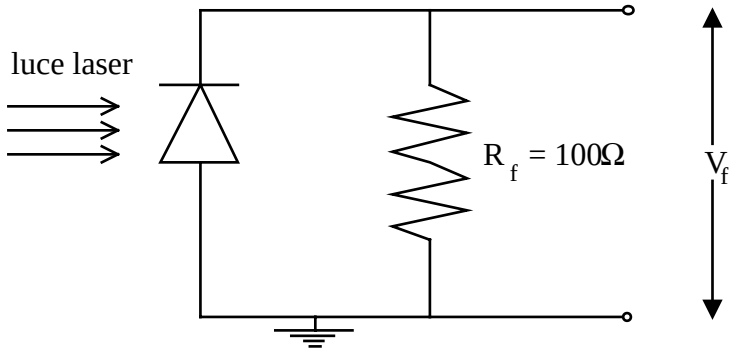

Fig. 6.4 Il circuito del fotodiodo

Nei grafici di Fig.6.5 e Fig.6.6 mostriamo lo spettro di rumore in potenza relativo RIN (Residual Intensity Noise) del laser, per le frequenze fino a 3.1KHz e fino a 12.5KHz; i valori in ordinata sono calcolati dividendo il rumore in potenza per la potenza del laser osservata al fotodiodo. Negli stessi grafici mostriamo anche il livello del rumore in potenza relativo nel caso di un laser con rumore shot in potenza e di un fotodiodo ideale. Tale livello è calcolato in modo analogo a quanto fatto in (3.30) mediante la formula:

$$RIN_{shot} = \sqrt{\frac{h\nu_L P_0}{P_0^{\,2}}} = \sqrt{\frac{h\nu_L}{P_0}}$$

Da questi grafici si nota come il laser in nostro possesso sia lontano dall' essere limitato dal livello di rumore shot in intensità. Per tale ragione nel §3.5 nel calcolare la sensibilità di un rivelatore ultracriogenico risonante equipaggiato con il trasduttore ottico da noi proposto abbiamo inserito il valore sperimentale di rumore in potenza e non il livello shot calcolabile.

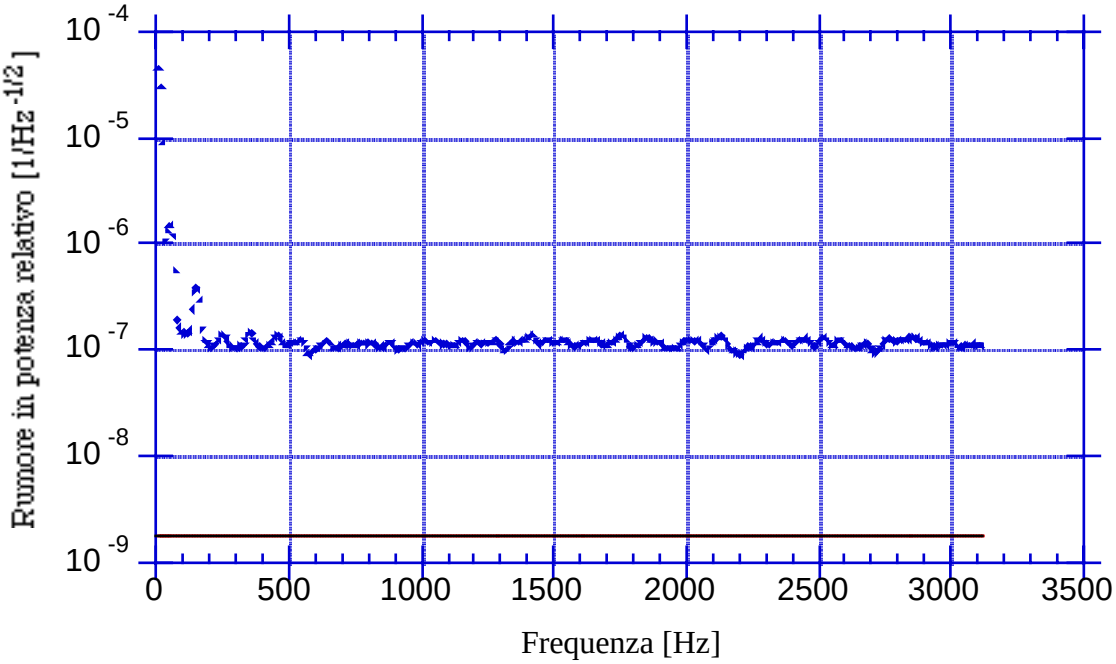

Fig. 6.5 Rumore in potenza relativo del laser: la linea continua rappresenta il livello di rumore shot del laser

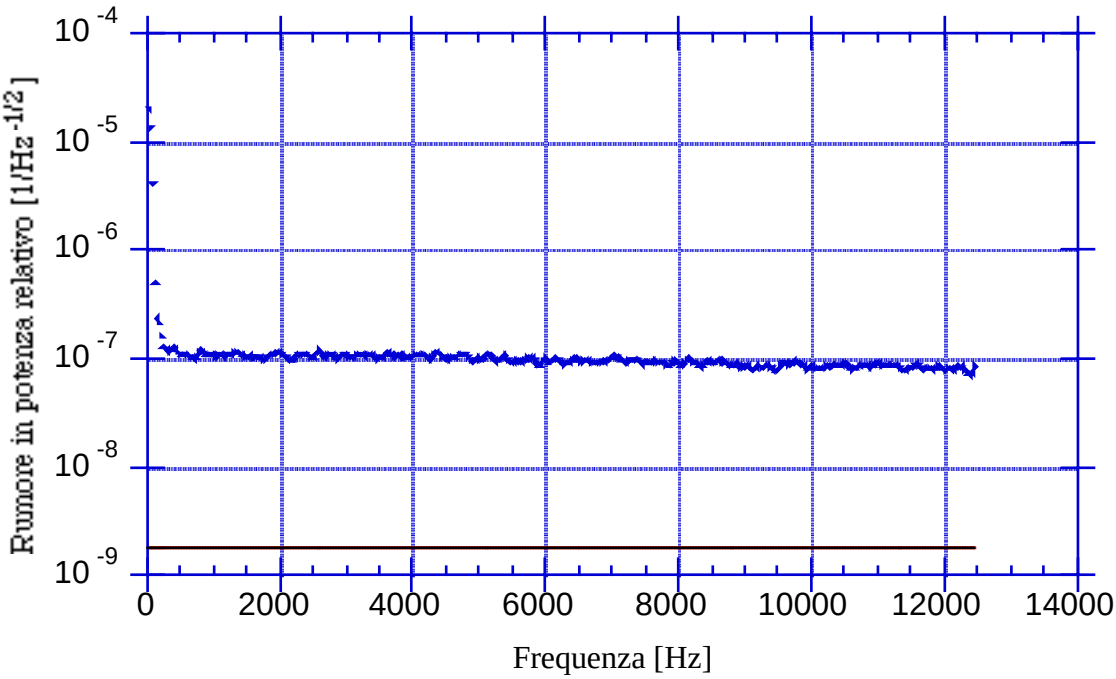

Fig. 6.6 Rumore in potenza relativo del laser: la linea continua rappresenta il livello di rumore shot del laser

§ 6.3 - Realizzazione di una cavità Fabry-Perot sul trasduttore

Abbiamo assemblato il trasduttore e lo abbiamo montato in posizione verticale sul banco ottico, mediante un apposito sostegno in ferro. Abbiamo così potuto realizzare una cavità Fabry-Perot sul trasduttore: la prova è interessante soprattutto perchè ha permesso di verificare la praticità d' uso ed efficienza del basculatore dello specchio da noi progettato.

La cavità sul trasduttore è formata da un primo specchio a superficie piana e da un secondo specchio, incollato al tamburo, che ha un raggio di curvatura R_{c2}=150mm; entrambi gli specchi sono prodotti dalla CVI modello Y10-0537-0 e hanno una riflettività nominale R>0.997. Il secondo specchio è stato attaccato al tamburo mediante la colla SuperAttak; con questa stessa colla si è attaccato il primo specchio ad una flangia che si è poi fissata al basculatore dello specchio mediante quattro viti. La cavità è risultata esser lunga (24 ± 2)mm.

In base a quanto scritto nel paragrafo §3.2, la cavità Fabry-Perot risulta essere stabile in quanto:

$$0 < g_1 g_2 = 0.84 < 1$$

In un caso come il nostro in cui la cavità è costituita da uno specchio piano ed uno curvo, la posizione del waist del fascio laser coincide con quella dello specchio piano. Si verifica [2] che per una cavità piano-concava, come la nostra, il waist si trova sulla superficie dello specchio piano e vale:

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} \sqrt{\frac{g_2}{1-g_2}} \tag{6.1}$$

Nel nostro caso il waist della cavità è pari a 0.136mm.

In base alle informazioni fornite dalla ditta produttrice del laser, il fascio di luce ha un waist di 0.35mm a 50mm dalla sorgente. Pertanto, affinchè il modo TEM_{00} possa accoppiarsi bene alla cavità, è necessario adattare la sezione del fascio laser prima di inviarlo su di essa: ciò può essere fatto mediante una opportuna lente.

Si dimostra che, se il profilo di un fascio è gaussiano, come nel caso del modo TEM_{00}, allora dopo avere attraversato una lente sottile generica esso ha ancora profilo gaussiano [2]. Per conoscere come si propaga il fascio attraverso una lente è necessario conoscere il waist del fascio prima e dopo la lente, che indichiamo rispettivamente con w_1 e w_2, e la distanza alla quale essi si trovano dalla lente, che indichiamo con d_1 e d_2 rispettivamente; indichiamo con f la focale della lente (cfr. Fig.6.7).

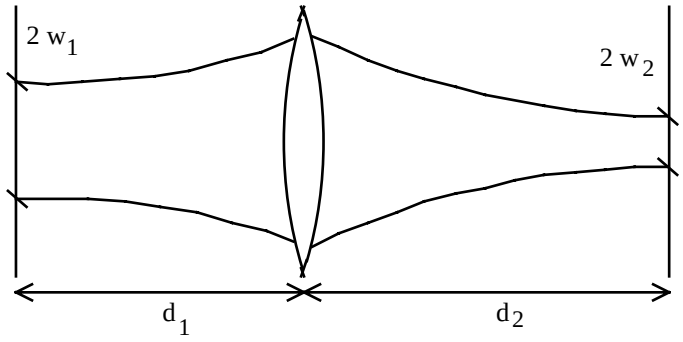

Fig. 6.7 Propagazione di un fascio gaussiano attraverso una lente sottile

Conviene definire il parametro f_0:

$$f_0 = \frac{\pi w_1 w_2}{\lambda_L} \tag{6.2}$$

ove al solito λ_L rappresenta la lunghezza d' onda della radiazione. Si dimostra [3] che valgono le seguenti relazioni:

$$d_1 = f \pm \frac{w_1}{w_2}\sqrt{f^2 - {f_0}^2}$$
$$d_2 = f \pm \frac{w_2}{w_1}\sqrt{f^2 - {f_0}^2} \qquad (6.3)$$

ove si possono equivalentemente scegliere o i segni - o i segni +. Si ha dunque che il problema dell' adattamento della sezione del fascio laser viene risolto mediante una lente di focale $f>f_0$.

Dati i nostri parametri sperimentali per realizzare la cavità Fabry-Perot abbiamo usato una lente di focale f=500mm che è stata posta alla distanza d_1=1736mm dal punto ove si trova il waist del fascio uscente dalla sorgente laser e alla distanza d_2=686mm dallo specchio di ingresso della cavità.

L' allineamento della cavità sul trasduttore è stato fatto per passi: si sono prima posizionati il secondo specchio della cavità sul tamburo, la lente1 di adattamento del fascio ed il beam-splitter (cfr. Fig.6.2); tramite i due specchi di rimando e l' iride si è fatto sì che che il fascio riflesso dallo specchio tornasse indietro sulla sorgente. Si è poi montato il primo specchio della cavità sul suo apposito basculatore (cfr. §.4.3) e lo si è basculato fino ad aver il corretto cammino di ritorno del fascio riflesso sulla sorgente. Infine si è posizionata la lente2 e sul suo fuoco il fotodiodo, montato in un circuito simile a quello di Fig.6.4 ma con R_f=220Ω.

Una volta allineata così la cavità si è guardato sull' oscilloscopio il segnale generato dal fotodiodo. In base alla (3.9) quando la cavità è in risonanza ottica il segnale in riflessione è minimo; per osservare la risonanza abbiamo sfruttato la possibilità offerta dal laser di cambiare la sua frequenza. Abbiamo applicato una tensione d.c. alla boccola SLOW del laser (cfr. §.6.1), che comanda il termoregolatore; il livello di tale tensione veniva variato a mano valendo comunque al più qualche Volt. Alla boccola FAST che comanda il piezoelettrico (cfr. §.6.1) abbiamo invece inviato un' onda triangolare a 40Hz di ampiezza 40V picco-picco. In questa maniera abbiamo potuto far variare periodicamente la frequenza del laser e campionare, a seconda del livello della tensione d.c. fornito all' ingresso SLOW, diversi intervalli di 160MHz all' interno del FSR della cavità.

Sull' oscilloscopio abbiamo evidenziato diverse curve di risonanza, in corrispondenza di diversi modi del campo elettromagnetico entro la cavità. Agendo lievemente sul basculatore dello specchio e sui montaggi degli specchi di rimando abbiamo cercato di allineare meglio la cavità ed isolare il picco di risonanza che dovrebbe corrispondere al modo TEM_{00}: una sicura identificazione del modo sarebbe possibile solo mediante una telecamera a raggi infrarossi che permetta di osservare la geometria del modo. In Fig.6.8 mostriamo la curva di risonanza che abbiamo isolato e la rampa dell' onda triangolare: il minimo nasce dal fatto che la frequenza del laser,

grazie alla rampa triangolare, passa per i valori per cui la cavità entra e poi esce dalla risonanza ottica.

Fig. 6.8 La risonanza ottica della cavità-trasduttor

La larghezza a mezza altezza del picco di Fig.6.8 può essere convertita in frequenza in base al fatto che un' onda inviata alla boccola FAST del laser fa variare la frequenza di quest' ultimo di 4MHz/Volt, in base alle caratteristiche fornite dalla casa. Pertanto deduciamo che la larghezza a mezza altezza del picco di assorbimento corrisponde ad un intervallo di frequenze $\Delta\nu_{F.P.}$:

$$\Delta\nu_{F.P.} = (4.5 \pm 0.3)\text{MHz}$$

Poichè il FSR (cfr. (3.15)) corrisponde ad un intervallo di frequenze di $(6.3 \pm 0.5)\text{GHz}$, deduciamo che la finesse della cavità, definita come rapporto tra il FSR e la larghezza a mezza altezza della curva di risonanza, è:

$$F = (1.4 \pm 0.2) \cdot 10^3$$

Tramite la (3.15) si calcola che la riflettività degli specchi vale:

$$R = 0.9978 \pm 0.0003$$

ove si è supposto che ambedue gli specchi abbiano la stessa riflettività. Il valore dedotto dalle misure sperimentali risulta coerente con il valore nominale di riflettività degli specchi.

Dalla profondità del picco di assorbimento possiamo anche calcolare il coefficiente Σ_1 di perdita in intensità del primo specchio della cavità. Poichè fuori dalla risonanza la luce raccolta al fotodiodo sviluppava una tensione di (400 ± 5)mV e poichè il picco è profondo (50 ± 2)mV, allora in base alla (3.9) si deduce che il coefficiente di perdita del primo specchio vale:

$$\Sigma_1 = (2.2 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$$

Tale valore è circa il doppio di quello che ci si attenderebbe in base al fatto che usualmente il coefficiente di perdita e la trasmettività dello specchio si considerano circa uguali. Ciò va probabilmente imputato al fatto che la cavità non è ottimamente allineata, come dimostra la presenza di altre curve di risonanza di non trascurabile ampiezza.

Come si era anticipato, l' interesse di queste misure consiste principalmente nel fatto che esse hanno dimostrato l' efficacia del movimento di basculaggio del primo specchio della cavità da noi progettato; per un più agevole allineamento della cavità, tuttavia, ne dovrà essere migliorata la praticità. Si è evidenziato, inoltre, come sia critico ai fini della facilità di allineamento della cavità incollare bene gli specchi ai rispettivi supporti. Le prove andranno ripetute con la fibra ottica, per controllare l' efficacia di entrambi i basculatori assieme.

§ 6.4 - Bibliografia

[1] Manuale in dotazione al laser prodotto dalla LightWave Electronics, modello numero 126-1064-050

[2] O. Svelto, *Principi dei laser*, Tamburini editore, Milano (1972)

[3] H. Kogelnik, T. Li, Applied Optics **5** (1966) 1550

Conclusioni

Il lavoro presentato in questa tesi offre una soluzione sperimentale originale al problema della trasduzione e amplificazione del segnale nei rivelatori di onde gravitazionali a barra risonante. Si è proposto un sistema di estrazione del segnale gravitazionale della barra, che fa uso di un trasduttore risonante su cui viene alloggiata una cavità Fabry-Perot, di una seconda cavità Fabry-Perot e della tecnica di aggancio in frequenza di Pound e Drever. Si sono individuate e studiate le sorgenti di rumore a banda larga e a banda stretta di tale dispositivo accoppiato ad una barra risonante raffreddata fino a 100mK. Si è calcolato che questo rivelatore può portare a una sensibilità in termini della minima ampiezza di impulso gravitazionale rivelabile di $h_{min} \approx 3 \cdot 10^{-20}$ con una banda utile di circa 50Hz. Tali valori sono gli stessi che si avrebbero con il trasduttore capacitivo in uso ad esempio nel rivelatore AURIGA, se il segnale da questo prodotto potesse essere letto attraverso uno SQUID-d.c. con energia di rumore per unità di banda corrispondente a $100\hbar$ [1]: attualmente però i migliori SQUID disponibili presentano un rumore superiore a questo livello di circa un fattore dieci [2]. In ogni caso il trasduttore qui proposto appare come una valida e praticabile alternativa ai sistemi di trasduzione e amplificazione del segnale attualmente in uso. Inoltre la possibilità di montare su una stessa barra risonante due trasduttori dal funzionamento completamente diverso, quali un trasduttore capacitivo (o induttivo) e un trasduttore ottico, risulta molto interessante anche ai fini dei veti che si possono porre in modo più stringente sui segnali della barra [3], [4].

Stimolati dai risultati offerti dal calcolo della sensibilità, si è intrapresa la realizzazione di un prototipo del trasduttore ottico proposto. Ci si è concentrati prima sulla progettazione e realizzazione della parte meccanica: si è studiato il moto di una lamina circolare caricata e ne si sono calcolate le dimensioni in modo che il suo primo modo simmetrico abbia la stessa frequenza del primo modo longitudinale della barra del rivelatore AURIGA. Si sono poi progettati due basculatori per elementi ottici facenti parte del trasduttore; presso l' officina meccanica dei Laboratori Nazionali di Legnaro dell' I.N.F.N. sono stati realizzati i componenti meccanici così progettati. Si sono misurate le frequenze dei modi di risonanza ed i relativi fattori di merito del sistema meccanico costituito da una barra a temperatura ambiente, del tutto analoga a

quella del rivelatore AURIGA, a cui si è fissato il trasduttore realizzato; i risultati sono comparabili a quelli tipici ottenuti con trasduttori capacitivi in situazioni sperimentali simili [1].

Infine si sono effettuate delle misure di ottica su banco che hanno dimostrato l' efficacia del movimento di basculaggio realizzato: si è riuscita ad allineare una cavità Fabry-Perot sul trasduttore ed osservarne la risonanza ottica. Si è anche misurato il rumore in potenza della sorgente laser usata: il risultato di questa misura è stato inserito nel calcolo della sensibilità del rivelatore in quanto tale rumore determina il maggior contributo al rumore di back-action introdotto dal trasduttore.

Il lavoro che bisogna svolgere prima che si possa avere un trasduttore ottico funzionante è ancora molto e riguarda diversi aspetti. Sarà interessante raffreddare alle temperature dell' azoto liquido e dell' elio liquido il trasduttore, per conoscerne il Q meccanico in queste condizioni. Il trasduttore qui proposto, infatti, presenta una geometria complicata se confrontata, ad esempio, con quella a fungo del trasduttore capacitivo: tale fatto potrebbe determinare un peggioramento del valore del fattore di merito meccanico, che al contrario si vuole quanto più alto possibile per migliorare la sensibilità del rivelatore. Inoltre andrà studiato quanto le perdite di potenza del fascio laser sugli specchi della cavità-trasduttore e la potenza da essa trasmessa influiscano sulla sensibilità del rivelatore; la potenza trasmessa dalla cavità e persa dagli specchi si stima essere inferiore a 300μW. Pertanto ciò non dovrebbe costituire un problema per quanto riguarda la criogenia, in quanto il potere refrigerante del criostato AURIGA, ad esempio, è pari a circa 1.25mW alla temperatura di 0.1K. Tuttavia si potrebbe instaurare un gradiente di temperatura sul rivelatore, il cui effetto sulla sensibilità è di difficile stima. I risultati di questa tesi sono comunque incoraggianti e di stimolo ad affrontare con fiducia le prossime difficoltà.

Bibliografia

[1] J. -P. Zendri, *Realizzazione della catena di rivelazione per l' antenna gravitazionale AURIGA: trasduttore elttromeccanico, amplificatore a SQUID, ottimizzazione*, tesi di dottorato di ricerca in Fisica, Univ. di Padova , A. A. 1991-92

[2] Z. K. Geng, Rev. Sci. Instrum. **64** (1993) 1319

[3] J. Chiang et al., Nucl.Instrum. Methods A **311** (1992) 603

[4] M. Canzoniere et al., Phys. Rev. **D** (1993) 5233

Appendice

I piezoelettrici

La piezoelettricità è una proprieta di certi materiali a struttura cristallina scoperta da Pierre e Jacques Curie sul finire del secolo scorso. La caratteristica fondamentale dei materiali piezoelettrici è che essi sviluppano una tensione se sottoposti ad una pressione di tipo meccanico. Materiali che esibiscono tale proprietà sono o monocristalli intrinsecamente piezoelettrici quali il quarzo e il sale di Rochelle o ceramiche ferroelettriche appositamente polarizzate.

Il processo fisico alla base della piezoelettricità è analogo a quello per cui un materiale ferromagnetico può essere magnetizzato. Una ceramica piezolettrica è composta da celle, dette domini, all' interno delle quali i momenti di dipolo elettrico degli atomi componenti sono allineati. In condizioni di riposo i dipoli elettrici risultanti dei vari domini sono orientati a caso, in modo tale che il dipolo elettrico totale risultante sia nullo. Se si applica un forte campo elettrico costante (d.c.) lungo una certa direzione $\hat{d}$, i dipoli tendono ad allinearsi e il materiale presenta una polarizzazione residua permanente. Se poi si sottopone tale materiale a stress meccanico, la struttura cristallina tende a deformarsi, causando una variazione del momento totale di dipolo del materiale. Ad esempio, se viene applicata al materiale una forza di compressione lungo la direzione $\hat{d}$, viene sviluppato un voltaggio con la stessa polarità del campo 'polarizzante' originario; viceversa, la polarità è opposta nel caso di una forza di trazione parallela alla direzione $\hat{d}$. In generale la relazione che lega la forza applicata al voltaggio sviluppato è estremamente lineare per un ampio intervallo di intensità di forza e di frequenza; tale linearità spiega il largo uso dei materiali piezoelettrici.

Accelerometri

Come è evidente dalla Fig.A.1, in generale un accelerometro [1] è costituito essenzialmente da uno o più ceramiche piezoelettriche che collegano rigidamente la base dell' accelerometro ad una o più masse inerti, dette masse sismiche.

Quando la base dell' accelerometro vibra, la massa sismica accelera solidamente ad essa (cioè con la stessa accelerazione in modulo e fase) sicchè sul piezoelettrico agisce una forza pari al prodotto tra la massa e l' accelerazione della massa sismica. In base a quanto appena scritto, come conseguenza di questa forza il piezoelettrico sviluppa un voltaggio che risulta proporzionale alla accelerazione della base dell' accelerometro e quindi della superficie su cui esso è posto.

Fig. A.1 Schema di un accelerometro [1]

Da un punto di vista fisico un accelerometro può essere schematizzato dal semplice sistema di Fig.A.2, ove m rappresenta la massa sismica, M la massa della base dell' accelerometro e K la costante elastica del piezoelettrico.

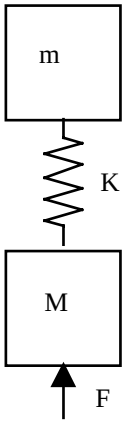

Fig. A.2 Modello meccanico che bene descrive il funzionamento di un accelerometro

Si osserva che, se viene applicata una forzante esterna F del tipo $F=F_e \cdot \sin\omega t$, il sistema presenta una risonanza propria:

$$\nu_{ris} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{K\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}$$

che si riduce a

$$\nu_{ris} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

nel caso che l' accelerometro venga montato (come di solito avviene) su una struttura con M>>m; tipicamente per gli accelerometri è ν_{ris}>20KHz. Tale frequenza di risonanza rappresenta un limite superiore per l' utilizzo dell' accelerometro: solo al di sotto di essa, infatti, la funzione di trasferimento del sistema di Fig.A.2 è costante e quindi vibrazioni in ingresso della stessa intensità ma a diversa frequenza producono una stessa risposta. Per allargare la banda di frequenza utile si può o usare materiali piezoelettrici con una costante elastica superiore (cosa che nella realtà si rivela difficile in quanto le differenze tra i valori della costante elastica per diverse ceramiche piezoelettriche sono minime) o diminuire il valore delle masse sismiche. Tale seconda soluzione presenta tuttavia lo svantaggio di ridurre la sensibilità dell' accelerometro in quanto una inferiore massa sismica esercita sul piezoelettrico una forza inferiore: di conseguenza gli accelerometri più sensibili sono quelli più massivi ma offrono un inferiore range di frequenza utile.

Gli accelerometri hanno anche un limite dinamico inferiore dovuto al fatto che per loro natura essi non possono lavorare per sollecitazini costanti o a bassissima frequenza. Nella pratica il limite inferiore è stabilito dalla elettronica di preamplificazione del segnale fornito dall' accelerometro e vale generalmente qualche decina di Hz.

[1] M. Serridge, T. R. Licht, *Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers Handbook*, Brüel & Kjær (1987)

Ringraziamenti

Desidero ringraziare qui il Prof. M. Cerdonio per la fiducia che mi ha costantemente dimostrata durante il lavoro di tesi, per i suoi preziosi suggerimenti e le stimolanti discussioni.

Ringrazio per la disponibilità e i validi suggerimenti il Prof. S. Vitale e tutti gli altri componenti del gruppo AURIGA tra cui il Dott. A. Ortolan, il Dott. G. A. Prodi e soprattutto il Dott. L. Taffarello e il Dott. J. P. Zendri che hanno condiviso con me le difficoltà incontrate in questa tesi e mi hanno sempre incoraggiata.

Ringrazio inoltre il Dott. C. Rizzo e il Dott. G. Ruoso per le interessanti discussioni e, con loro, anche il Prof. E. Polacco e tutti gli altri componenti del gruppo PVLAS per l' importante contributo all' ideazione della catena di trasduzione.

Ringrazio il Dott. M. Prevedelli per la disponibilità e gli utili suggerimenti.

Sono grata a tutti i membri dell' Officina meccanica dei Laboratori Nazionali di Legnaro dell' I.N.F.N. ed in particolare al Sig. M. Lollo per la cura e attenzione con cui ha realizzato i diversi componenti del trasduttore.

Un grazie affettuoso va alla mia famiglia e a Gianmaria per avermi sostenuta e aiutata in questi anni di studio.